Брзопроменљиво поље

Максвелове једначине у произвољном електромагнетском пољу гласе

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \; , \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \; , \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho \; , \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \; . \tag{4}$$

Прва Максвелова једначина (**Фарадејев закон**)

- Извор индукованог (вртложног) електричног поља је $-\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Друга Максвелова једначина (**допуњени уопштени Амперов закон**)

- Извор магнетског поља су $\mathbf{J}$ и $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (густина струје електричног помераја)

Трећа Максвелова једначина (**уопштени Гаусов закон**)

- Извор електричног поља су електрична оптерећења (наелектрисања)

Четврта Максвелова једначина (**закон о конзервацији магнетског флукса**)

- Не постоје магнетска оптерећења аналогна електричним оптерећењима која стварају магнетско поље

Везе између вектора, који се појављују у Максвеловим једначинама, дефинисане су конститутивним релацијама

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) , \tag{5}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) , \tag{6}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) . \tag{7}$$

У линеарним срединама везе између вектора дате су релацијама

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \; , \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \; , \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \; . \tag{8}$$

Једначина континуитета у брзопроменљивом пољу

На основу друге Максвелове једначине следи да је

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{H}) = \operatorname{div}\mathbf{J} + \operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{9}$$

$$0 = \operatorname{div}\mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{D}, \tag{10}$$

$$0 = \operatorname{div}\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{11}$$

Одатле се добија за једначину континуитета у брзопроменљивом пољу

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{12}$$

Струје и наелектрисања нису међусобно независне величине.

Променљиве струје индукују променљива оптерећења!

У случају када су струје расподељене по површи, једначину континуитета записујемо у облику

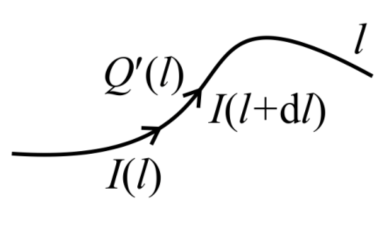
$$\operatorname{div}_{\mathrm{s}}\mathbf{J}_{\mathrm{s}} = -\frac{\partial \rho_{\mathrm{s}}}{\partial t}, \tag{13}$$

где оператор $\operatorname{div}_{\mathrm{s}}$ означава површинску дивергенцију, а $\mathbf{J}_{\mathrm{s}}$ је вектор густине површинске струје.

Веза између струје у проводнику и подужне густине наелектрисања, Q', дата је релацијом

$$\frac{\partial I(l)}{\partial l} = -\frac{\partial Q'(l)}{\partial t}, \tag{14}$$

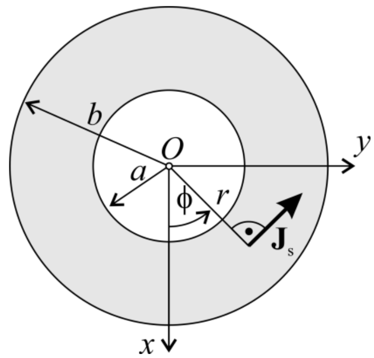
где је l линијска координата, приказана на слици 1. Извођење ове једначине показаћемо нешто касније.



Слика 1.

Пример:

У вакууму постоји површинска простопериодична струја, веома високе кружне учестаности ω, по површи кружног прстена, полупречника a и b, као на слици. Ако је вектор густине површинске струје $\mathbf{J}_\mathrm{s} = \sqrt{2} J_{\mathrm{s}0} \cos\phi \cos(\omega t) \mathbf{i}_\phi$, одредити израз за површинску густину наелектрисања на прстену.



Слика 2.

Израз за дивергенцију у цилиндричном координатном систему гласи

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,. \tag{15}$$

Површински оператор дивергенције садржи само прва два члана израза (15)

$$\mathrm{div}_\mathrm{s}\,\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\,. \tag{16}$$

Одатле следи да је

$$\mathrm{div}_\mathrm{s}\,\mathbf{J}_\mathrm{s} = \frac{1}{r}\frac{\partial J_{\mathrm{s}\phi}}{\partial \phi} = -\frac{\sqrt{2}J_{\mathrm{s}0}}{r}\sin\phi\cos(\omega t) = -\frac{\partial \rho_\mathrm{s}}{\partial t}\,. \tag{17}$$

Решавањем диференцијалне једначине (17) добија се израз за површинску густину наелектрисања

$$\rho_\mathrm{s}(t) = \frac{\sqrt{2}J_{\mathrm{s}0}}{r}\sin\phi\int_t \cos(\omega t)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}J_{\mathrm{s}0}}{\omega r}\sin\phi\sin(\omega t) + C = \frac{\sqrt{2}J_{\mathrm{s}0}}{\omega r}\sin\phi\sin(\omega t)\,, \tag{18}$$

јер је $C = 0$ у простопериодичном режиму.

Решавање диференцијалних једначина може да се избегне применом комплексног рачуна, као што ћемо видети касније.

Лоренцови потенцијали

На основу $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, следи да вектор магнетске индукције можемо да напишемо као ротор неког вектора, односно, $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$. **Дивергенција ротора произвољног вектора је увек нула!**

Када се $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ уврсти у прву Максвелову једначину, добија се

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A}=-\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{1}$$

јер су ротор и извод независни линеарни оператори те могу да замене места. Одатле следи да је

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)=0, \tag{2}$$

односно,

$$\boxed{\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}V}. \tag{3}$$

Ротор градијента проивољне функције је увек нула.

Први члан у изразу (3) представља индуковано електрично поље, а други члан компоненту поља која потиче од вишка наелектрисања.

Посматрамо сада **линеарну и хомогену средину** параметара ε и μ. Полазимо од друге Максвелове једначине

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{4}$$

која у линеарној средини постаје

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{5}$$

Када се вектор електричног изрази преко два потенцијала (3), добија се

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}V\right), \tag{6}$$

односно

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}-\mu\varepsilon\operatorname{grad}\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{7}$$

Када се искористи да је $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$, (7) постаје

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial V}{\partial t}\ . \tag{8}$$

На основу идентитета

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}\,, \tag{9}$$

добија се за (8)

$$\Delta\mathbf{A} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial V}{\partial t}\,. \tag{10}$$

Ова једначина има различита решења у зависности од тога шта се усвоји за $\mathrm{div}\,\mathbf{A}$.

Дивергенција неког вектора може независно да се усвоји од ротора датог вектора.

Наиме, ротор и дивергенција неког вектора садрже различите просторне изводе, због чега су међусобно независни.

На пример у Декартовом координатном систему изрази за ротор и диверенцију гласе, респективно

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{i}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{i}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{i}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right), \tag{11}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\ , \tag{12}$$

одакле следи да ове две величине могу независно да се дефинишу.

Погодно је да се усвоји

$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{A} = -\varepsilon\mu\,\frac{\partial V}{\partial t}}. \tag{13}$$

Овај услов назива се **Лоренцов услов**.

Тада (10) постаје

$$\Delta\mathbf{A} + \underline{\varepsilon\mu\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial V}{\partial t}} = -\mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} + \underline{\mu\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial V}{\partial t}}\ , \tag{14}$$

где имамо исте чланове са леве и десне стране једнакости. Након елиминације истих чланова, добијамо диференцијалну једначину за магнетски вектор-потенцијал у брзопроменљивом пољу

$$\boxed{\Delta\mathbf{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}}. \tag{15}$$

У стационарном пољу, извод магнетског вектор-потенцијала по времену је нула па диференцијална једначина гласи

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \ , \tag{16}$$

као што је показано у квазистационарном пољу.

Применом Лоренцовог услова, добија се формално иста диференцијална једначина за електрични скалар-потенцијал.

Полазимо од израза за вектор електричног поља

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\, V \ . \tag{17}$$

Узимањем дивергенције обе стране (17), добија се

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A} - \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, V \ . \tag{18}$$

У линеарној средини, ова једначина постаје

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A} - \varepsilon\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, V \ . \tag{19}$$

Када се уврсти $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$ и $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, V = \Delta V$, следи да је

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon} . \tag{20}$$

Коначно, применом Лоренцовог услова, добија се

$$\boxed{\Delta V - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}, \tag{21}$$

што је формално исто као и

$$\boxed{\Delta\mathbf{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}}. \tag{22}$$

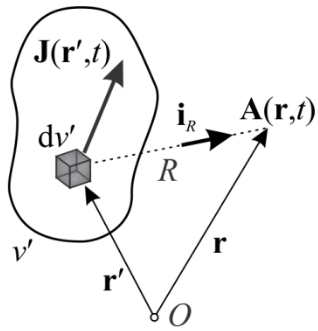
Решења за потенцијале гласе

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{v'}\frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}v \ , \tag{23}$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'}\frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}v \ , \tag{24}$$

где је $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Све величине илустроване су на слици 3.



Слика 3.

Потенцијали добијени на овај начин, називају се Лоренцови или закаснели потенцијали. У њима фигурише кашњење $\tau = \frac{R}{c}$, које представља време потребно да се пертурбација извора пренесе до тачке у којој се рачунају потенцијали.

Наиме, замислимо да извори (струје и наелектрисања) заузимају физички малу запремину Δv и да се налазе на растојању R од тачке у којој рачунамо потенцијале, тада претходни изрази постају

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\mu \mathbf{J}(t - R/c)\Delta v}{4\pi R}, \tag{25}$$

$$V(t) = \frac{\rho(t - R/c)\Delta v}{4\pi\varepsilon R}. \tag{26}$$

Из њих следи да се у произвољном тренутку t, на месту где рачунамо потенцијале, осећа јачина извора која је била у ранијем тренутку $t - R/c$. То значи да се у хомогеном диелектрику пермитивности ε и пермитивности μ, промене извора простиру коначном брзином која је једнака $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Извори електромагнетског поља

Прави извори електромагнетског поља су струје и наелектрисања. Међутим, за раздвајање наелектрисања и одржавање струја потребни су извори енергије. Уређаји који другу врсту енергије претварају у електромагнетску енергију подсећају на *струјне* и *напонске* генераторе у теорији електричних кола.

Побудне струје

Претпоставимо да у делу простора постоји струја која не зависи од јачине вектора електричног поља. Вектор запреминске густине те струје означавамо са $\mathbf{J}_{\mathrm{i}}$, а саму струју називамо побудном. У погледу стварања електромагнетског поља, побудна струја се третира на исти начин као стварна струја. Максвелове једначине у присуству ових струја гласе

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{\mathrm{i}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{4}$$

Промену је претрпела само друга Максвелова једначина јер су сада извори магнетског поља кондукционе струје $\mathbf{J}$, побудне струје $\mathbf{J}_{\mathrm{i}}$ и густина струје електричног померања $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Једначина континуитета сада гласи

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{div}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_{\mathrm{i}}) + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{D}, \tag{5}$$

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_{\mathrm{i}}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}. \tag{6}$$

У специјалном случају линеарне средине, конститутивне једначине гласе

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E},\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{7}$$

Релација $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ показује да вектор електричног поља утиче само на кондукционе струје, а не и на побудне.

Побудно поље

Претпоставимо сада да на наелектрисања делује неелектрично поље, независно од струја које постоје у датом простору. Овакво поље је еквивалентно идеалном напонском генератору из теорије електричних кола и називамо га побудним пољем, $\mathbf{E}_{\mathrm{i}}$.

Побудно поље делује на наелектрисања на исти начин као и право електрично поље, те вектор густине струје зависи од обе величине $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\mathrm{i}})$.

Међутим, временски променљиве побудно поље не ствара временски променљиво магнетско поље, као обично електрично поље.

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \tag{8}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,, \tag{9}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho\,, \tag{10}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0\,. \tag{11}$$

Утицај побудног поља види се само у изразу за густину електричних струја који у специјалном случају линеарне средине постаје

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\mathrm{i}}\right)}. \tag{12}$$

Преостале две конститутивне једначине остају непромењене: $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$.

На основу друге Максвелове једначине, једначина континуитета у овом случају гласи

$$\mathrm{div}\;\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\,. \tag{13}$$

Гранични услови и Максвелове једначине у интегралном облику

Максвелове једначине у диференцијалном облику захтевају да су први изводи векторских величина које се у њима појављују коначни. Међутим, на раздвојној површи две средине, неке величине се скоковито мењају, те су њихови изводи недефинисани. **Због тога, на границама домена користимо интегрални облик Максвелових једначина.**

Применом Стоксове теореме и теореме Гауса и Остоградског, добијамо Максвелове једначине у интегралном облику, као и једначину континуитета

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{1}$$

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\,, \tag{2}$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_v \rho \,\mathrm{d}v\,, \tag{3}$$

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0\,, \tag{4}$$

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}v\,. \tag{5}$$

Из ових једначина се изводе одговарајући гранични услови

$$\mathbf{n}\times\left(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\right) = 0\,, \tag{6}$$

$$\mathbf{n}\times\left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2\right) = \mathbf{J}_s\,, \tag{7}$$

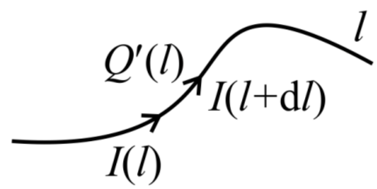
$$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2\right) = \rho_s\,, \tag{8}$$

$$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\right) = 0\,, \tag{9}$$

$$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2\right) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}\,, \tag{10}$$

где је нормала усмерена од средине 2 ка средини 1.

Једначина континуитета у проводнику са линијском струјом



Слика 4.

У случају жичаног проводника, једначина континуитета у интегралном облику даје

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}v \quad \Rightarrow I(l + \mathrm{d}l) - I(l) = -\frac{\partial Q'(l)}{\partial t} \mathrm{d}l \ . \tag{11}$$

Одакле следи да је

$$\frac{\partial I(l)}{\partial l} = -\frac{\partial Q'(l)}{\partial t} \, . \tag{12}$$

Поље у савршеном проводнику

Посматрамо проводник јако велике проводности, $\sigma \to \infty$.

Густина струје у проводнику мора бити коначна величина јер је

$$\mathbf{J} = N' q \mathbf{v}, \tag{1}$$

где је

N', концентрација слободних носилаца наелектрисања (електрона)

q, наелектрисање једног електрона

$\mathbf{v}$, брзина кретања електрона.

Вектор електричног поља у проводнику је приближно нула

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \to 0. \tag{2}$$

Шта је са магнетским пољем у проводнику?

Полазимо од Фарадејевог закона

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

који на основу претходног разматрања (2), постаје

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Одатле следи да је једино могуће решење $\mathbf{B}(t) = \text{const.}$

У проводнику може да постоји само стационарно магнетског поље.

Компас ће радити у Фарадејевом кавезу!

Проводник у временски промењљивом електромагнетском пољу: $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{H} = 0$.

Проводник у стационарном електромагнетском пољу: $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{B} = \text{const}$, $\mathbf{H} = \text{const}$.

Гранични услови на површи савршеног проводника

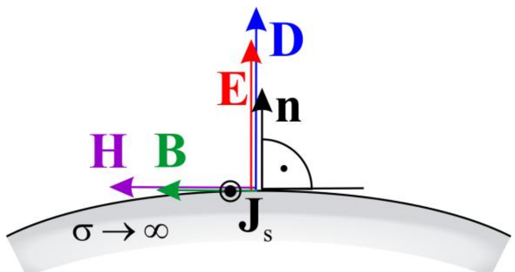
С обзиром да је поље у савршеном проводнику нула, гранични услови постају

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{n}\times\mathbf{E}=0\,, \tag{5}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)=\mathbf{J}_s \quad\Rightarrow\quad \mathbf{n}\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_s\,, \tag{6}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)=\rho_s \quad\Rightarrow\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}=\rho_s\,, \tag{7}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2)=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}=0\,, \tag{8}$$



Слика 5.

Комплексни вектори

Простопериодична скаларна величина се дефинише изразом

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta), \tag{1}$$

где је

$u(t)$, тренутна вредност

U , ефективна вредност,

$U_{\mathrm{m}} = U\sqrt{2}$, максимална вредност

ω, кружна учестаност,

$\omega t + \theta$, тренутна фаза,

θ , почетна фаза.

Простопериодична векторска величина је вектор чије су компоненте простопериодичне величине исте учестаности и, у општем случају, различитих фаза и ефективних вредности.

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{i}_x a_x(t) + \mathbf{i}_y a_y(t) + \mathbf{i}_z a_z(t), \tag{2}$$

$$a_x(t) = \sqrt{2}A_x \cos(\omega t + \theta_x), \tag{3}$$

$$a_y(t) = \sqrt{2}A_y \cos(\omega t + \theta_y), \tag{4}$$

$$a_z(t) = \sqrt{2}A_z \cos(\omega t + \theta_z). \tag{5}$$

Тренутни интензитет вектора $\mathbf{a}(t)$ је

$$a(t) = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)}. \tag{6}$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T a^2(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)\right)\mathrm{d}t} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ , \tag{7}$$

Комплексни представник скаларне величине $u(t)$, дефинише се као

$$\underline{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}, \tag{8}$$

$$u(t) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right). \tag{9}$$

Комплексни представник векторске величине $\mathbf{a}(t)$, дефинише се као

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_x\mathbf{i}_x + \underline{A}_y\mathbf{i}_y + \underline{A}_z\mathbf{i}_z\ , \tag{10}$$

где су

$$\underline{A}_x = A_x \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_x} , \tag{11}$$

$$\underline{A}_y = A_y \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_y} , \tag{12}$$

$$\underline{A}_z = A_z \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_z} . \tag{13}$$

комплексни представници појединих компонената у Декартовом координатном систему.

Повратак у временски домен врши се коришћењем израза

$$\mathbf{a}(t) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\,\underline{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right). \tag{14}$$

Максвелове једначине у комплексном домену

Простопериодичан режим је могућ само у линеарним срединама.

Максвелове једначине у комплексном домену без побудних струја и побудног поља гласе

$$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\mu\,\underline{\mathbf{H}}\,, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}\,, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{D}} = \underline{\rho}\,, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{B}} = 0\,, \tag{4}$$

при чему важи $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon\underline{\mathrm{E}}$, $\underline{\mathbf{B}} = \mu\underline{\mathbf{H}}$.

Једначина континуитета у комплексном домену гласи

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{J}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\rho}\,. \tag{5}$$

У случају жичаног проводника, једначина континуитета има облик

$$\frac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}l} = -\mathrm{j}\omega\underline{Q}'\,. \tag{6}$$

Како изгледају ове једначине у присуству побудних струја или побудног поља?

Закаснели потенцијали у комплексном домену

Подсетник:

Нека је комплексни представник простопериодичне величине $u(t)$,

$$\underline{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta},$$

онда је комплексни представник величине $u(t-\tau)$

$$\underline{U}' = \underline{U}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau},$$

јер се кашњење у времену за τ, пресликава у множење са $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}$ у комплексном домену. Одатле следи да је

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t-\frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}v \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\mathrm{d}v}, \qquad (1)$$

$$\boxed{V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}v \quad \Rightarrow \quad \underline{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \frac{\underline{\rho}(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\mathrm{d}v}, \qquad (2)$$

где је

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad (3)$$

фазни коефицијент, а $\lambda = \frac{c}{f}$ таласна дужина.

Израз за вектор јачине електричног поља у комплексном домену постаје

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \underbrace{-\operatorname{grad}\underline{V}(\mathbf{r})}_{\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{q}}\underbrace{-\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})}_{\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}}. \qquad (4)$$

За први члан, односно компоненту која потиче од вишка наелектрисања, добија се

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{q}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \operatorname{grad}\left(\frac{\underline{\rho}(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\right)\mathrm{d}v = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \underline{\rho}(\mathbf{r}')\mathrm{d}v \operatorname{grad}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \underline{\rho}(\mathbf{r}')\mathrm{d}v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\right)\mathbf{r}_0,$$

тј.

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{q}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \underline{\rho}(\mathbf{r}')\mathrm{d}v \frac{(1+\mathrm{j}\beta R)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R^2}\mathbf{r}_0}, \qquad (5)$$

због тога што градијент делује на координате *x*, *y*, *z*, а не на координате *x'*, *y'*, *z'*.

Израз за индуковано електрично поље гласи

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}(\mathbf{r}) = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{A}} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu}{4\pi}\int_{v}\frac{\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\mathrm{d}v}. \tag{6}$$

На основу једначине континуитета, добија се израз за густину наелектрисања

$$\rho = \mathrm{j}\frac{1}{\omega}\mathrm{div}\underline{\mathbf{J}} . \tag{7}$$

Лоренцов услов у комплексном домену гласи

$$\mathrm{div}\underline{\mathbf{A}} = -\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu\underline{V}$$

или (8)

$$\underline{V} = \frac{\mathrm{j}}{\omega\varepsilon\mu}\mathrm{div}\underline{\mathbf{A}} . \tag{9}$$

Применом Лоренцовог услова, електрично поље се може изразити само преко магнетског-вектор потенцијала

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{A}} - \mathrm{grad}\underline{V} = -\mathrm{j}\omega\left(\underline{\mathbf{A}} + \frac{1}{\beta^2}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\underline{\mathbf{A}}\right)}. \tag{10}$$

Вектор магнетске индукције једнак је

$$\underline{\mathbf{B}} = \mathrm{rot}\underline{\mathbf{A}} . \tag{11}$$

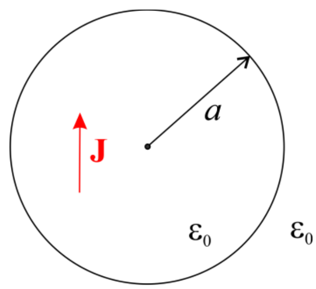
Када се уврсти интегрални израз за магнетски вектор-потенцијал, добија се

$$\boxed{\underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{v}\left(\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')\mathrm{d}v \times \mathbf{r}_0\right)\frac{(1+\mathrm{j}\beta R)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R^2}} . \tag{12}$$

У случају када је $\beta R << 1$, добијају се изрази који важе у квазистационарном пољу.

Задатак 294.

У вакууму, унутар сфере полупречника *a*, постоје брзопроменљиве простопериодичне струје комплексне густине $\underline{\mathbf{J}}$ и угаоне учестаности ω. Вектор $\underline{\mathbf{J}}$ је константан у свим тачкама сфере. Одредити (а) расподелу запреминских и површинских наелектрисања сфере, (б) магнетски вектор-потенцијал и електрични скалар-потенцијал у тачки *O* и (в) вектор јачине електричног поља у тачки *O*.



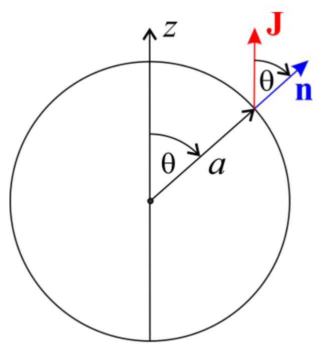
Слика 1.

Решење:

Густину запреминских наелектрисања, $\underline{\rho}$, добијамо из једначине континуитета у диференцијалном облику.

$$\mathrm{div}\underline{\mathbf{J}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\rho}\,. \tag{1}$$

С обзиром да је вектор $\underline{\mathbf{J}}$ константан, следи да је $\underline{\rho} = 0$.



Слика 2.

Површинску густину наелектрисања одређујемо на основу граничног услова

$$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2\right) = -\mathrm{j}\omega\rho_s\,, \tag{2}$$

где је вектор $\mathbf{n}$ усмерен од средине 2 ка средини 1. У посматраном примеру, средина 1 је простор изван сфере, а средина 2 је простор у сфери. Стога је

$$\mathbf{n}\cdot\left(0 - \mathbf{J}\right) = -\mathrm{j}\omega\rho_s\,, \tag{3}$$

$$\rho_s = -\mathrm{j}\frac{J}{\omega}\cos\theta\,. \tag{4}$$

Расподела наелектрисања је антисиметрично распоређена у односу на тачку *O*

$$\rho_s(\theta) = -\rho_s(\pi - \theta), \tag{5}$$

одакле следи да је електрични скалар-потенцијал у тачи *O* једнак нули.

Магнетски вектор-потенцијал у тачи *O* добијамо помоћу интеграла

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\underline{\mathbf{J}}\mathrm{d}v\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r} = \frac{\mu_0\underline{\mathbf{J}}}{4\pi}\int_0^a \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}4\pi r^2\mathrm{d}r}{r} = \tag{6}$$

$$= \mu_0\underline{\mathbf{J}}\int_0^a r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0\underline{\mathbf{J}}}{\beta^2}\int_0^a(-\mathrm{j}\beta r)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}\mathrm{d}(-\mathrm{j}\beta r) = \tag{7}$$

$$= \frac{\mu_0\underline{\mathbf{J}}}{\beta^2}\int_0^{-\mathrm{j}\beta a} x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \frac{\mu_0\underline{\mathbf{J}}}{\beta^2}(x-1)e^{x}\Big|_0^{-\mathrm{j}\beta a} = \tag{8}$$

$$= \frac{\mu_0\underline{\mathbf{J}}}{\beta^2}\left[(1+\mathrm{j}\beta a)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta a} - 1\right], \tag{9}$$

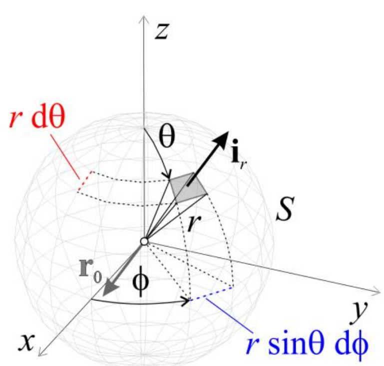
где је $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

(б) Електрично поље се састоји из две компоненте: компоненте која потиче од вишка наелектрисања ($\mathbf{E}_\mathrm{q}$) и индукованог електричног поља ($\mathbf{E}_\mathrm{i}$). Електрично поље које потиче од вишка наелектрисања одређујемо помоћу интеграла

$$\mathbf{E}_\mathrm{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\underline{\rho}_s(1+\mathrm{j}\beta r)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}\mathrm{d}S}{r^2}\mathbf{r}_0,$$

где је

- $\mathrm{d}S = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$, елементарна површина у сферном координатном систему,
- $\mathbf{r}_0$, јединични вектор усмерен од елементарне површи ка тачки у којој рачунамо поље.



С обзиром да се правац и смер вектора $\mathbf{i}_r$ мењају од тачке до тачке, неопходно је овај вектор разложити на компоненте у Декартовом координатном систему!

$$\mathbf{r}_0 = -\mathbf{i}_r = -\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i}_x - \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{i}_y - \cos\theta\,\mathbf{i}_z\,. \tag{10}$$

За појединачне компоненте електричног поља у Декартовом координатном систему добија се

$$\mathbf{E}_{\mathrm{q},x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\underline{\rho}_s(1+\mathrm{j}\beta r)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}(-\sin\theta\cos\phi)\mathrm{d}S}{r^2} = 0, \tag{11}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{q},y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\underline{\rho}_\mathrm{s}\left(1+\mathrm{j}\beta r\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}\left(-\sin\theta\sin\phi\right)\mathrm{d}S}{r^2} = 0\,, \tag{12}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{q},z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\underline{\rho}_\mathrm{s}\left(1+\mathrm{j}\beta r\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}\left(-\cos\theta\right)\mathrm{d}S}{r^2} = \tag{13}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{-\mathrm{j}\dfrac{J}{\omega}\cos\theta\left(1+\mathrm{j}\beta a\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta a}\left(-\cos\theta\right)a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta}{a^2} = \tag{14}$$

$$= \mathrm{j}\frac{J}{4\pi\varepsilon_0\omega}\left(1+\mathrm{j}\beta a\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{j}\frac{J}{3\varepsilon_0\omega}\left(1+\mathrm{j}\beta a\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta a}\,. \tag{15}$$

Коначно имамо

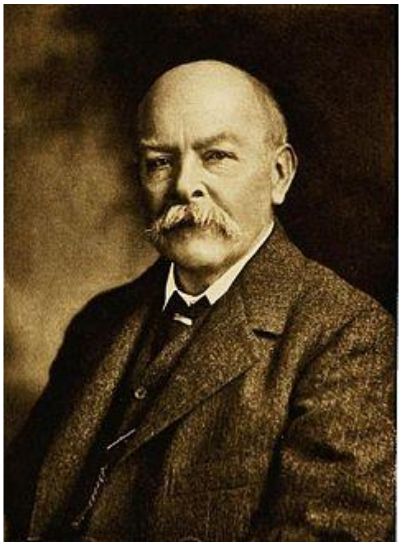
$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{q} = -\mathrm{j}\frac{\underline{\mathbf{J}}}{3\varepsilon_0\omega}\left(1+\mathrm{j}\beta a\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta a}\,.$$

Индуковано електрично поље је

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{A}} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0\underline{\mathbf{J}}}{\beta^2}\left[\left(1+\mathrm{j}\beta a\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta a} - 1\right]. \tag{16}$$

Поинтингова теорема

Поинтингова теорема представаља закон о одржању снага електромагнетског поља.



John Henry Poynting

- John Henry Poynting (9 September 1852 – 30 March 1914) was an English physicist.
- From 1872 to 1876 he was a student at Cambridge University, where he attained high honours in mathematics.
- In the late 1870s he worked in the Cavendish Laboratory at Cambridge under James Clerk Maxwell. In 1880, he became the first professor of physics at the University of Birmingham.
- He was the developer and eponym of the Poynting vector, which describes the direction and magnitude of electromagnetic energy flow and is used in the Poynting theorem, a statement about energy conservation for electric and magnetic fields. This work was first published in 1884.

Извор Wikipedia

Посматрамо део простора, запремине v, који је ограничен помоћу површи S. У посматраном делу простора, средина је линеарна и изотропна, параметара ε, μ и σ.

Полазимо од прве две Максвелове једначине

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{2}$$

Најпре, прву једначину множимо скаларно са $\mathbf{H}$, а другу са $\mathbf{E}$

$$\mathbf{H} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

У формулама (3) и (4), појављују се скаларни производи облика $\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ и $\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

Једноставним трансформацијама, показује се да важи

$$\boxed{\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|\mathbf{H}\|^2\right)}. \tag{5}$$

Наиме,

$$\|\mathbf{H}\|^2=\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}=H_x^2+H_y^2+H_z^2\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})=\frac{\partial}{\partial t}\left(H_x^2+H_y^2+H_z^2\right)= \tag{7}$$

$$=2H_x\frac{\partial H_x}{\partial t}+2H_y\frac{\partial H_y}{\partial t}+2H_z\frac{\partial H_z}{\partial t}=2\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\,. \tag{8}$$

Применом овог идентитета, (3) и (4), постају

$$\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{2}\frac{\partial\|\mathbf{H}\|^2}{\partial t}\,, \tag{9}$$

$$\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\|\mathbf{E}\|^2}{\partial t}\,. \tag{10}$$

Одузимањем (9) од (10), добија се

$$\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\|\mathbf{E}\|^2}{\partial t}+\frac{\mu}{2}\frac{\partial\|\mathbf{H}\|^2}{\partial t}\,. \tag{11}$$

Лева страна једнакости (11), може да се трансформише помоћу идентитета из векторске анализе

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}}, \tag{12}$$

($\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$, извод ф-је две промењливе и померање чланова у мешовитом производу)

па је

$$-\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\|\mathbf{E}\|^2}{\partial t}+\frac{\mu}{2}\frac{\partial\|\mathbf{H}\|^2}{\partial t}\,. \tag{13}$$

У случају када спољашње изворе поља представимо помоћу побудног поља, $\mathbf{E}_\mathrm{i}$, важи $\mathbf{J}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}_\mathrm{i})$

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{J}}{\sigma}-\mathbf{E}_\mathrm{i}\quad\Rightarrow\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}=\frac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}-\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{i}\,. \tag{14}$$

Заменом (14) у (13), добија се

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{i}=\frac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\|\mathbf{E}\|^2}{\partial t}+\frac{\mu}{2}\frac{\partial\|\mathbf{H}\|^2}{\partial t}+\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}). \tag{15}$$

Ако интегралимо обе стране једнакости (15) по запремини *v*, следи да је

$$\int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}v = \int_v \frac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}\mathrm{d}v + \int_v \left(\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\|\mathbf{E}\|^2}{\partial t} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial\|\mathbf{H}\|^2}{\partial t}\right)\mathrm{d}v + \int_v \mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\mathrm{d}v\,. \tag{16}$$

Применом теореме Гауса и Осторградског, једнакост добија коначан облик

$$\boxed{\int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}v = \int_v \frac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}\mathrm{d}v + \frac{\partial}{\partial t}\int_v \left(\frac{\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2}{2} + \frac{\mu\|\mathbf{H}\|^2}{2}\right)\mathrm{d}v + \oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}\,. \tag{17}$$

где је $\mathrm{dS} = \mathbf{n}\mathrm{d}S$, при чему се референтни смер за нормалу узима ка споља.

У скраћеној форми, Поинтингова теорема гласи

$$p_{\mathrm{g}}(t) = p_{\mathrm{J}}(t) + \frac{\partial W_{\mathrm{tot}}}{\partial t} + \oint_S \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}\,, \tag{18}$$

где су све величине дефинисане у табели испод.

$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{i}}$,	Запреминска густина снаге извора
$\dfrac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}$,	Запреминска густина снаге Џулових губитака
$p_{\mathrm{g}}(t) = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}v$,	Укупна снага извора у посматраном домену
$p_{\mathrm{J}}(t) = \int_v \dfrac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}\mathrm{d}v$,	Укупна снага Џулових губитака у посматраном домену
$w_{\mathrm{E}} = \dfrac{\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2}{2}$	Запреминска густина електричне енергије
$w_{\mathrm{M}} = \dfrac{\mu\|\mathbf{H}\|^2}{2}$	Запреминска густина магнетске енергије
$W_{\mathrm{TOT}} = \int_v \left(\dfrac{\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2}{2} + \dfrac{\mu\|\mathbf{H}\|^2}{2}\right)\mathrm{d}v$	Укупна електромагнетска енергија у посматраном домену
$\dfrac{\partial W_{\mathrm{TOT}}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_v \left(\dfrac{\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2}{2} + \dfrac{\mu\|\mathbf{H}\|^2}{2}\right)\mathrm{d}v$,	Брзина промене електромагнетске енергије
$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$,	Поинтингов вектор $\left[\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$
$\oint_S \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$	Брзина којом се електромагнетска енергија из посматраног домена преноси у околни простор

На сличан начин изводи се Поинтингова теорема у случају када су извори поља побудне струје. Једина разлика је у другој Максвеловој једначини која сада гласи

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{\mathrm{i}} + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_{\mathrm{i}} + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{19}$$

Спроводећи исти поступак као малопре, добија се исказ Поинтингове теореме у случају када су извори поља побудне струје

$$\boxed{-\int_v \mathbf{J}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}v = \int_v \sigma\|\mathbf{E}\|^2\,\mathrm{d}v + \frac{\partial}{\partial t}\int_v\left(\frac{\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2}{2}+\frac{\mu\|\mathbf{H}\|^2}{2}\right)\mathrm{d}v + \oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}. \qquad (20)$$

https://en.wikipedia.org/wiki/File:DipoleRadiation.gif

Задатак 263.

(а) Како гласи Поинтингова теорема у случају савршеног диелектрика?

У савршеном диелектрику $(\sigma = 0)$ нема губитака, па је снага Џулових губитака нула.

(б) Како гласи Поинтингова теорема у случају стационарног поља?

$p_\mathrm{g}(t) = p_\mathrm{J}(t) + \oint_S \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}$, јер је $\dfrac{\partial W_\mathrm{tot}}{\partial t} = 0$.

(в) Како гласи Поинтингова теорема у случају домена обухваћеног савршеним проводником?

На површи савршеног проводника, вектор електичног поља има само нормалну компоненту, а вектор магнетског поља само тангенцијалну. Одатле следи да Поинтингов вектор има само тангенцијалну компоненту .

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = E_\mathrm{n}\mathbf{i}_\mathrm{n}\times H_\mathrm{t}\mathbf{i}_\mathrm{t} = E_\mathrm{n}H_\mathrm{t}(\mathbf{i}_\mathrm{n}\times\mathbf{i}_\mathrm{t}) = P(\mathbf{i}_\mathrm{n}\times\mathbf{i}_\mathrm{t}).$$

Флукс Поинтинговог вектора по површи савршеног проводника је нула јер су Поинтингов вектор и вектор нормале међусобно управни

$$\oint_S P(\mathbf{i}_\mathrm{n}\times\mathbf{i}_\mathrm{t})\cdot\mathrm{d}S\,\mathbf{i}_\mathrm{n} = \oint_S P(\mathbf{i}_\mathrm{n}\times\mathbf{i}_\mathrm{n})\cdot\mathbf{i}_\mathrm{t}\mathrm{d}S = 0 .$$

Између домена који је ограничен савршеним проводником и околине нема размене електромагнетске енергије!

Поинтингова теорема у овом случају гласи

$$p_\mathrm{g}(t) = p_\mathrm{J}(t) + \frac{\partial W_\mathrm{tot}}{\partial t} .$$

Ради смањења електромагнетског зрачења врши се оклапање електричних уређаја.