Математички подсетник

Посматрамо произвољни вектор у Декартовом координатном систему

$$\mathbf{H} = H_x \mathbf{i}_x + H_y \mathbf{i}_y + H_z \mathbf{i}_z \tag{1}$$

Квадратна норма вектора или квадрат модула једнак је

$$\|\mathbf{H}\|^2 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 . \tag{2}$$

Извод квадратне норме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2\right) = \tag{3}$$

$$= 2H_x \frac{\partial H_x}{\partial t} + 2H_y \frac{\partial H_y}{\partial t} + 2H_z \frac{\partial H_z}{\partial t} = 2\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} . \tag{4}$$

На основу (6), добијамо идентитет

$$\boxed{\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|\mathbf{H}\|^2\right)}. \tag{5}$$

Аналогија са скаларним случајем:

$$h(t) \cdot \frac{\partial h(t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(h^2(t)\right). \tag{6}$$

Дивергенција векторског производа

$$\operatorname{div}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{c}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{c}\,. \tag{1}$$

Приказаћемо само интуитивни доказ.

Формално, лева страна једнакости се може записати помоћу оператора набла ∇

$$\operatorname{div}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\nabla\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,. \tag{2}$$

Мешовити производ три вектора дефинише се

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,. \tag{3}$$

Ако дивергенцију векторског производа схватимо као извод производа две промењиве, следи

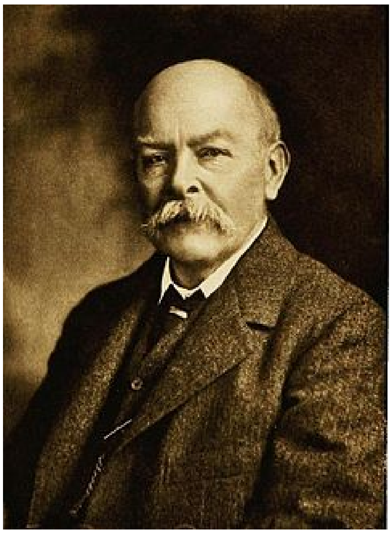
$$\nabla\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\nabla\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathrm{const})+\nabla\cdot(\mathbf{b}=\mathrm{const}\times\mathbf{c})=\mathbf{c}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})-\mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{c})\,, \tag{4}$$

односно

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{c}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{c}}\,.$$

Поинтингова теорема

Поинтингова теорема показује како се расподељује снага генератора у електромагнетском пољу.



John Henry Poynting

- John Henry Poynting (9 September 1852 – 30 March 1914) was an English physicist.
- From 1872 to 1876 he was a student at Cambridge University, where he attained high honours in mathematics.
- In the late 1870s he worked in the Cavendish Laboratory at Cambridge under James Clerk Maxwell. In 1880, he became the first professor of physics at the University of Birmingham.
- He was the developer and eponym of the Poynting vector, which describes the direction and magnitude of electromagnetic energy flow and is used in the Poynting theorem, a statement about energy conservation for electric and magnetic fields. This work was first published in 1884.

Извор Wikipedia

Посматрамо део простора, запремине v, који је ограничен помоћу површи S. У посматраном делу простора, средина је линеарна, параметара ε, μ и σ.

Полазимо од прве две Максвелове једначине

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{2}$$

Најпре, прву једначину множимо скаларно са $\mathbf{H}$, а другу са $\mathbf{E}$

$$\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} + \varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

У формулама (3) и (4), појављују се скаларни производи облика $\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ и $\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

Применом идентитета,

$$\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\|\mathbf{H}\|^2\right), \tag{5}$$

добијамо

$$\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{2}\frac{\partial\|\mathbf{H}\|^2}{\partial t}, \tag{6}$$

$$\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\|\mathbf{E}\|^2}{\partial t}. \tag{7}$$

Одузимањем (6) од (7), добија се

$$\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\|\mathbf{E}\|^2}{\partial t}+\frac{\mu}{2}\frac{\partial\|\mathbf{H}\|^2}{\partial t}. \tag{8}$$

Лева страна једнакости (8), може да се трансформише помоћу идентитета

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}. \tag{9}$$

Одатле следи да је

$$-\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\|\mathbf{E}\|^2}{\partial t}+\frac{\mu}{2}\frac{\partial\|\mathbf{H}\|^2}{\partial t}. \tag{10}$$

У случају када спољашње изворе поља представимо помоћу побудног поља, $\mathbf{E}_{\mathrm{i}}$, важи

$$\mathbf{J}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}_{\mathrm{i}}), \tag{11}$$

односно

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{J}}{\sigma}-\mathbf{E}_{\mathrm{i}}\quad\Rightarrow\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}=\frac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}-\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{i}}. \tag{12}$$

Заменом (12) у (10), добија се

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{i}}=\frac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\|\mathbf{E}\|^2}{\partial t}+\frac{\mu}{2}\frac{\partial\|\mathbf{H}\|^2}{\partial t}+\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}). \tag{13}$$

Ако интегралимо обе стране једнакости (13) по запремини v, следи да је

$$\int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}v=\int_v\frac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}\mathrm{d}v+\int_v\left(\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\|\mathbf{E}\|^2}{\partial t}+\frac{\mu}{2}\frac{\partial\|\mathbf{H}\|^2}{\partial t}\right)\mathrm{d}v+\int_v\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\mathrm{d}v. \tag{14}$$

Применом теореме Гауса и Остроградског, једнакост добија коначан облик

$$\boxed{\int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{i}\,\mathrm{d}v = \int_v \frac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}\mathrm{d}v + \frac{\partial}{\partial t}\int_v\left(\frac{\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2}{2}+\frac{\mu\|\mathbf{H}\|^2}{2}\right)\mathrm{d}v + \oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}. \tag{15}$$

где је $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}\mathrm{d}S$, при чему се референтни смер за нормалу узима ка споља.

У табели дајемо физичко тумачење величина које се појављују у Поинтинговој теореми.

$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{i}$	Запреминска густина снаге извора
$p_\mathrm{g}(t) = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{i}\,\mathrm{d}v$,	Укупна снага извора у посматраном домену
$\frac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}$,	Запреминска густина снаге Џулових губитака
$p_\mathrm{J}(t) = \int_v \frac{\|\mathbf{J}\|^2}{\sigma}\mathrm{d}v$,	Укупна снага Џулових губитака у посматраном домену
$w_\mathrm{E} = \frac{\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2}{2}$	Запреминска густина електричне енергије
$w_\mathrm{M} = \frac{\mu\|\mathbf{H}\|^2}{2}$	Запреминска густина магнетске енергије
$W_\mathrm{TOT} = \int_v\left(\frac{\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2}{2}+\frac{\mu\|\mathbf{H}\|^2}{2}\right)\mathrm{d}v$	Укупна електромагнетска енергија у посматраном домену
$\frac{\partial W_\mathrm{TOT}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_v\left(\frac{\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2}{2}+\frac{\mu\|\mathbf{H}\|^2}{2}\right)\mathrm{d}v$,	Брзина промене електромагнетске енергије
$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$,	**Поинтингов вектор** $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$
$\oint_S \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$	Брзина којом се електромагнетска енергија из посматраног домена преноси у околни простор (**снага која излази из домена**)

У скраћеном облику, Поинтингову теорему можемо да запишемо

$$p_\mathrm{g}(t) = p_\mathrm{J}(t) + \frac{\partial W_\mathrm{tot}}{\partial t} + \oint_S \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,. \tag{16}$$

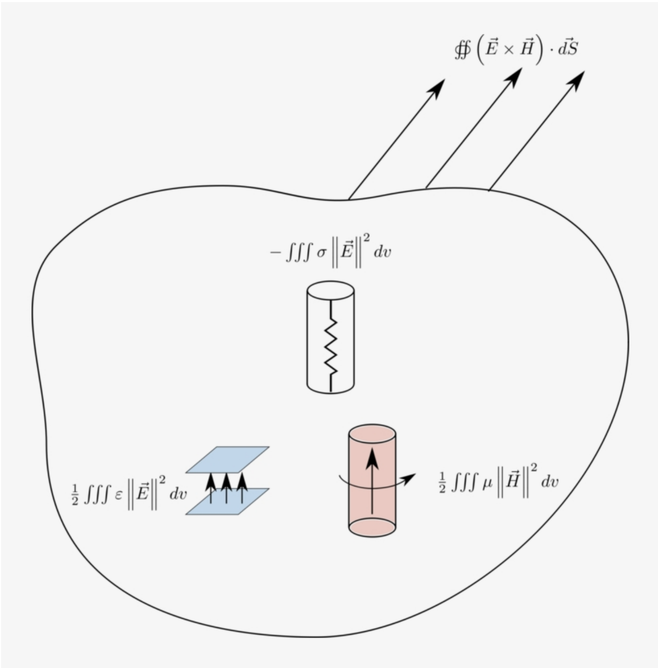
Интеграл $\oint_S \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$ може бити

- Већи од нуле - енергија излази из домена у околину
- Мањи од нуле - енергија улази у домен из околине
- Једнак нули - нема размене енергије са околином

Погледај како изгледа Поинтингов вектор у простору око побуђеног дипола (антена)

https://en.wikipedia.org/wiki/File:DipoleRadiation.gif

На слици 1, илустрована је Поинтингова теорема.



Слика 1.

На сличан начин изводи се Поинтингова теорема у случају побудних струја.

Једина разлика је у другој Максвеловој једначини која сада гласи

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_\mathrm{i} + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_\mathrm{i} + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{17}$$

Спроводећи исти поступак као малопре, добија се

$$\boxed{-\int_v \mathbf{J}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}v = \int_v \sigma\|\mathbf{E}\|^2\,\mathrm{d}v + \frac{\partial}{\partial t}\int_v\left(\frac{\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2}{2} + \frac{\mu\|\mathbf{H}\|^2}{2}\right)\mathrm{d}v + \oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}. \tag{18}$$

Одакле се види да је снага генератора у виду побудних струја једнака $-\int_v \mathbf{J}_\mathrm{i}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}v$.

Задатак 263.

(а) Како гласи Поинтингова теорема у случају **савршеног диелектрика**?

У савршеном диелектрику нема губитака $(\sigma = 0)$, па је снага Џулових губитака нула.

$$p_\mathrm{g}(t) = \frac{\partial W_\mathrm{tot}}{\partial t} + \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} .$$

(б) Како гласи Поинтингова теорема у случају **стационарног поља**?

$$p_\mathrm{g}(t) = p_\mathrm{J}(t) + \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} ,$$

јер је $\dfrac{\partial W_\mathrm{tot}}{\partial t} = 0$.

(в) Како гласи Поинтингова теорема у случају **домена обухваћеног савршеним проводником**?

На површи савршеног проводника, вектор електичног поља има само нормалну компоненту, а вектор магнетског поља само тангенцијалну.

Одатле следи да Поинтингов вектор има само тангенцијалну компоненту .

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_\mathrm{n}\mathbf{i}_\mathrm{n} \times H_\mathrm{t}\mathbf{i}_\mathrm{t} = E_\mathrm{n}H_\mathrm{t}(\mathbf{i}_\mathrm{n} \times \mathbf{i}_\mathrm{t}) = P(\mathbf{i}_\mathrm{n} \times \mathbf{i}_\mathrm{t}) .$$

Флукс Поинтинговог вектора по површи савршеног проводника је нула јер су Поинтингов вектор и вектор нормале међусобно управни

$$\oint_S P(\mathbf{i}_\mathrm{n} \times \mathbf{i}_\mathrm{t}) \cdot \mathrm{d}S\, \mathbf{i}_\mathrm{n} = \oint_S P(\mathbf{i}_\mathrm{n} \times \mathbf{i}_\mathrm{n}) \cdot \mathbf{i}_\mathrm{t} \mathrm{d}S = 0 .$$

Између домена који је ограничен савршеним проводником и околине нема размене електромагнетске енергије!

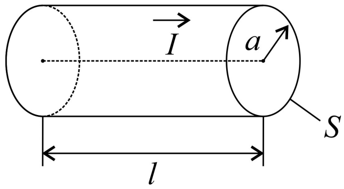
Поинтингова теорема у овом случају гласи

$$p_\mathrm{g}(t) = p_\mathrm{J}(t) + \frac{\partial W_\mathrm{tot}}{\partial t} .$$

- Ради смањења електромагнетског зрачења, електронски уређаја се оклапају (смештају у металне кутије)
- Електронско испитивање уређаја врши се у Фарадејевим кавезима ради изолације од околних сметњи.

Пример:

У дугачкој жици облика цилиндра, полупречника a, направљеној од материјала проводности σ, дужине l, постоји стална струја I. Применити Поинтингову теорему на површ која се поклапа са површином жице (S).



Решење:

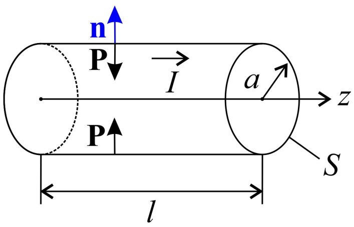
У стационарном пољу, Поинтингова теорема гласи

$$p_{\mathrm{g}}(t) = p_{\mathrm{J}}(t) + \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} .$$

Пошто домен обухвата само површ жице, снага генератора је једнака нули. Одатле се добија

$$p_{\mathrm{J}}(t) = -\oint_S \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} .$$

Сада ћемо да покажемо како се применом Поинтингове теореме добија добро познати израз из Основа електротехнике.



Ако усвојимо да се z-оса поклапа са осом жице, вектор густине струје у жици је

$$\mathbf{J} = \frac{I}{S}\mathbf{i}_z ,$$

где је S површина попречног пресека жице.

Одатле је вектор електричног поља

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{S} = \frac{I}{\sigma S}\mathbf{i}_z .$$

На основу Амперовог закона, вектор магнетског поља на омотачу жице је

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a}\mathbf{i}_\phi ,$$

а у унутрашњости

$$\mathbf{H} = \frac{Jr}{2}\mathbf{i}_\phi .$$

Поинтингов вектор је

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH\left(\mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_\phi\right) = EH\left(-\mathbf{i}_\mathrm{r}\right)$$

и има само радијалну компоненту ($\mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_\phi = -\mathbf{i}_\mathrm{r}$).

Флукс Поинтинговог вектора по површи цилиндра различит је од нуле само по омотачу. На базисима је једнак нули јер су Поинтингов вектор и нормала међусобно управни (нормала на базисима је паралелна z-оси).

На омотачу имамо

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{I}{\sigma S}\frac{I}{2\pi a}\mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_\phi = \frac{I^2}{2\pi a \sigma S}\left(-\mathbf{i}_\mathrm{r}\right).$$

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{S_\mathrm{omotac}} \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{S_\mathrm{omotac}} \frac{I^2}{2\pi a \sigma S}\left(-\mathbf{i}_r\right) \cdot \mathrm{d}s\mathbf{i}_r = -\frac{I^2}{2\pi a \sigma S}\int_{S_\mathrm{omotac}} \mathrm{d}s = -\frac{I^2}{2\pi a \sigma S} 2\pi a l = -\frac{I^2}{\sigma S} l = -RI^2 .$$

Одатле следи да је $P_\mathrm{J} = RI^2$.

Електричне и магнетске особине материјала

Линеаран материјал:

- Електромагнетске особине материјала (пермитивност, пермеабилност, проводност) не зависе од интензитета поља

Особине свих материјала (линеарних и нелинеарних) зависе од брзине промене поља (због инерције електричних оптерећења).

Линеарни материјали у ужем смислу

- Зависност од брзине промене поља је занемарљива

$$\mathbf{D}(t) \approx \varepsilon \mathbf{E}(t),\ \mathbf{B}(t) \approx \mu \mathbf{H}(t),\ \mathbf{J}(t) \approx \sigma \mathbf{E}(t) \tag{1}$$

Линеарни материјали у ширем смислу

- Зависност од брзине промене поља се може написати у облику

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon \mathbf{E}(t) + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(t)}{\partial t^2} + \ldots \tag{2}$$

$$\mathbf{B}(t) = \mu \mathbf{H}(t) + \mu_1 \frac{\partial \mathbf{H}(t)}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}(t)}{\partial t^2} + \ldots \tag{3}$$

$$\mathbf{J}(t) = \sigma \mathbf{E}(t) + \sigma_1 \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} + \sigma_2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(t)}{\partial t^2} + \ldots \tag{4}$$

При простопериодичним пољима, претходне релације постају

$$\underline{\mathbf{D}}(\omega) = \varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\omega) + \varepsilon_1 \mathrm{j}\omega \underline{\mathbf{E}}(\omega) + \varepsilon_2 (\mathrm{j}\omega)^2 \underline{\mathbf{E}}(\omega) + \ldots = \left(\varepsilon_0 + \mathrm{j}\omega\varepsilon_1 - \omega^2 \varepsilon_2 + \ldots\right) \underline{\mathbf{E}}(\omega) = \underline{\varepsilon}(\omega) \underline{\mathbf{E}}(\omega), \tag{5}$$

$$\underline{\mathbf{B}}(\omega) = \underline{\mu}(\omega) \underline{\mathbf{H}}(\omega), \tag{6}$$

$$\underline{\mathbf{J}}(\omega) = \underline{\sigma}(\omega) \underline{\mathbf{E}}(\omega). \tag{7}$$

Комплексна перимитивност и пермеабилност се обично пишу у облику

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon'' = \varepsilon^{-\mathrm{j}\delta}, \tag{8}$$

$$\underline{\mu} = \mu' - \mathrm{j}\mu'' = \mu^{-\mathrm{j}\delta}. \tag{9}$$

Видећемо у следећем одељку да су **губици у материјалима сразмерни имагинарним деловима пермитивности и пермеабилности.**

Снага у колима простопериодичне струје

Подсетник – снага у колима простопериодичне струје

$$p(t)=u(t)i(t)=2UI\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega t+\psi)=2UI\cos(\omega t+\theta)\cos\left(\omega t+\theta-\underbrace{(\theta-\psi)}_{\phi}\right)=$$

$$=2UI\cos(\omega t+\theta)\cos((\omega t+\theta)-\phi)=2UI\cos(\omega t+\theta)(\cos(\omega t+\theta)\cos\phi+\sin(\omega t+\theta)\sin\phi)=$$

$$=2UI\cos^2(\omega t+\theta)\cos\phi+UI\sin(2\omega t+2\theta)\sin\phi$$

$$\boxed{p(t)=u(t)i(t)=2UI\cos\phi\cos^2(\omega t+\theta)+UI\sin\phi\sin(2\omega t+2\theta)}$$

Средња вредност снаге у току једног периода

$$P_{\mathrm{sr}}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=UI\cos\phi\ .$$

Комплексна снага дата је изразом

$$\underline{S}=\underline{U}\,\underline{I}^*=UI\cos\phi+\mathrm{j}UI\sin\phi=P+\mathrm{j}Q\,,$$

где је

$P=UI\cos\phi$ и $Q=UI\sin\phi$.

Реални део комплексне снаге једнак је средњој вредности снаге у току једног периода.

Имагинарни део комплексне снаге једнак је амплитуди дела снаге који се периодично мења.

Поинтингова теорема у комплексном домену

Полазимо од Максвелових једначина у комплексном домену

$$\operatorname{rot}\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\mu}\underline{\mathbf{H}}\,, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + \mathrm{j}\omega\underline{\varepsilon}\underline{\mathbf{E}}\,. \tag{2}$$

Најпре, прву једначину множимо скаларно са $\underline{\mathbf{H}}^*$ (звездица означава конјуговано комплексну вредност)

$$\underline{\mathbf{H}}^* \cdot \operatorname{rot}\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\mu}H^2\,. \tag{3}$$

Циљ је да добијемо векторски производ $\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*$ аналогно комплексној снази $\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*$.

Другу једначину најпре конјугујемо, па множимо скаларно са $\underline{\mathbf{E}}$

$$\underline{\mathbf{E}} \cdot \operatorname{rot}\underline{\mathbf{H}}^* = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* + (-\mathrm{j}\omega)\underline{\varepsilon}^* E^2\,. \tag{4}$$

Потом, другу једначину одузимамо од прве и добијамо

$$\underline{\mathbf{E}} \cdot \operatorname{rot}\underline{\mathbf{H}}^* - \underline{\mathbf{H}}^* \cdot \operatorname{rot}\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* - \mathrm{j}\omega\underline{\varepsilon}^* E^2 + \mathrm{j}\omega\underline{\mu}H^2\,. \tag{5}$$

У случају када извор електромагнетског поља моделујемо као побудно поље важи

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{\underline{\mathbf{J}}}{\sigma} - \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}\,. \tag{6}$$

Када уврстимо (5) и искористимо идентитет $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) = \underline{\mathbf{H}}^* \operatorname{rot}\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{E}}\operatorname{rot}\underline{\mathbf{H}}^*$

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* = \frac{\|\underline{\mathbf{J}}\|^2}{\sigma} - \mathrm{j}\omega\left(\underline{\varepsilon}^* E^2 - \underline{\mu}H^2\right) + \operatorname{div}\left(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\right)\,. \tag{7}$$

Ако извршимо интергацију по запремини и применимо теорему Гауса и Остроградског, добија се

$$\int_v \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^*\,\mathrm{d}v = \int_v \frac{\|\underline{\mathbf{J}}\|^2}{\sigma}\mathrm{d}v + \mathrm{j}2\omega\int_v\left(\frac{\underline{\mu}H^2}{2} - \frac{\underline{\varepsilon}^* E^2}{2}\right)\mathrm{d}v + \oint_S \left(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\right)\mathrm{d}\mathbf{s}\,. \tag{8}$$

Комплексни Поинтингов вектор $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*$!

Ако раставимо комплексну пермитивност и пермеабилност на реални и имагинарни део, (8) постаје

$$\int_v \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* \,\mathrm{d}v = \int_v \frac{J^2}{\sigma}\mathrm{d}v + \mathrm{j}\omega\int_v \left((\mu'-\mathrm{j}\mu'')H^2 - (\varepsilon'+\mathrm{j}\varepsilon'')E^2\right)\mathrm{d}v + \oint_S \left(\underline{\mathbf{E}}\times\underline{\mathbf{H}}^*\right)\mathrm{d}\mathbf{s}\,. \tag{9}$$

Ако издвојимо реални део биланса снага (9)

$$\mathrm{Re}\left\{\int_v \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* \,\mathrm{d}v\right\} = \int_v \frac{J^2}{\sigma}\mathrm{d}v + \int_v \left(\omega\mu'' H^2 + \omega\varepsilon'' E^2\right)\mathrm{d}v + \mathrm{Re}\left\{\oint_S \left(\underline{\mathbf{E}}\times\underline{\mathbf{H}}^*\right)\mathrm{d}\mathbf{s}\right\}, \tag{10}$$

видимо да се активна снага генератора улаже у:

$\int_v \frac{J^2}{\sigma}\mathrm{d}v$	Снага Џулових губитака, увек позитивна
$\int_v \left(\omega\mu'' H^2 + \omega\varepsilon'' E^2\right)\mathrm{d}v$	Снага губитака који настају приликом поларизације и магнетизације Увек позитивна, следи да је $\varepsilon''>0\,,\mu''>0$
$\mathrm{Re}\left\{\oint_S \left(\underline{\mathbf{E}}\times\underline{\mathbf{H}}^*\right)\mathrm{d}\mathbf{s}\right\}$	Снага која се предаје околини Може бити позитивна, негативна или једнака нули

Реактивна снага генератора се расподељује на следећи начин

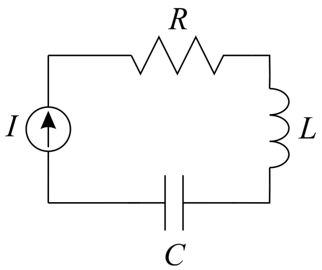
$$\mathrm{Im}\left\{\int_v \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* \,\mathrm{d}v\right\} = \mathrm{j}2\omega\int_v \left(\frac{\mu' H^2}{2} - \frac{\varepsilon' E^2}{2}\right)\mathrm{d}v + \mathrm{Im}\left\{\oint_S \left(\underline{\mathbf{E}}\times\underline{\mathbf{H}}^*\right)\mathrm{d}\mathbf{s}\right\}, \tag{11}$$

$$\mathrm{Im}\left\{\int_v \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* \,\mathrm{d}v\right\} = \mathrm{j}2\omega\left(W_{\mathrm{M}} - W_{\mathrm{E}}\right) + \mathrm{Im}\left\{\oint_S \left(\underline{\mathbf{E}}\times\underline{\mathbf{H}}^*\right)\mathrm{d}\mathbf{s}\right\}, \tag{12}$$

$W_{\mathrm{M}} = \int_v \frac{\mu' H^2}{2}\mathrm{d}v$	Средња вредност магнетске енергије током једног периода
$W_{\mathrm{E}} = \int_v \frac{\varepsilon' E^2}{2}\mathrm{d}v$	Средња вредност електричне енергије током једног периода
$\mathrm{Im}\left\{\oint_S \left(\underline{\mathbf{E}}\times\underline{\mathbf{H}}^*\right)\mathrm{d}\mathbf{s}\right\}$	Амплитуда дела снаге који описује периодичну размену енергије између домена и околине

Аналогија са колима наизменичних струја:

$$\underline{S}_{\mathrm{g}} = RI^2 + \mathrm{j}\omega LI^2 - \mathrm{j}\frac{I^2}{\omega C} = RI^2 + \mathrm{j}2\omega\left(W_{\mathrm{M}} - W_{\mathrm{E}}\right)$$



Комплексна снага генератора троши се на покривање Џулових губитака и промену електромагнетске енергије.

Исти резултат би се добио применом Поинтингове теореме на домен који обухвата цело коло.

На високим учестаностима, поред наведених чланова, морало би да се узме у обзир и зрачење које постоји услед несавршених лемова, савијутака проводника итд.

Шта би се добило применом Поинтингове теореме на домен који обухвата само *R*, *L* и *C*?

Пример: Резонатор

Посматрамо домен *v* који је изолован од околине тако да не постоји размена електромагнетске енергије. На пример, простор унутар металне кутије је електромагнетски изолован од околине.

Флукс Поинтинговог вектора по површи домена је стога нула

$$\oint_S \left(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\right) \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \, .$$

Активна снага генератора троши се на покривање губитака (Џулови губици услед несавршености проводника и диелектрика, итд.).

$$\mathrm{Re}\left\{\int_v \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* \, \mathrm{d}v\right\} = P_{\mathrm{gub}} \, ,$$

Реактивна снага генератора једнака је

$$\mathrm{Im}\left\{\int_v \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} \cdot \underline{\mathbf{J}} \, \mathrm{d}v\right\} = \mathrm{j}2\omega \int_v \left(\frac{\mu\left\|\underline{\mathbf{H}}\right\|^2}{2} - \frac{\varepsilon\left\|\underline{\mathbf{E}}\right\|^2}{2}\right) \mathrm{d}v = \mathrm{j}2\omega\left(W_{\mathrm{M}} - W_{\mathrm{E}}\right),$$

Домен је у резонанцији ако је реактивна снага генератора једнака нули.

Тада важи

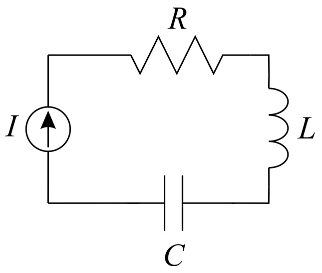
$$W_{\mathrm{E}} = W_{\mathrm{M}} \, .$$

Средња вредност електричне и магнетске енергије током једног периода су исте.

Аналогија са осцилаторним колима у колима простопериодичне струје

$$\underline{S}_{\mathrm{g}} = RI^2 + \mathrm{j}\omega LI^2 - \mathrm{j}\frac{I^2}{\omega C} = RI^2 + \mathrm{j}2\omega\left(W_{\mathrm{M}} - W_{\mathrm{L}}\right)$$

$$Q_{\mathrm{g}} = 0 \Rightarrow W_{\mathrm{M}} = W_{\mathrm{E}}$$



Ако нема губитака, нема потребе за радом генератора.

Теоријски, једном побуђене осцилације могу да трају неограничено дуго!

Ако погледамо биланс снага у временском домену

$$p_{\mathrm{g}}(t) = p_{\mathrm{J}}(t) + \frac{\partial W_{\mathrm{tot}}}{\partial t} + \oint_S \mathbf{P}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + \frac{\partial W_{\mathrm{tot}}}{\partial t} + 0 \Rightarrow \frac{\partial W_{\mathrm{tot}}}{\partial t} = 0 \Rightarrow W_{\mathrm{tot}} = W_{\mathrm{e}} + W_{\mathrm{m}} = \mathrm{const}\,.$$

У сваком реалном резонатору постоје губици.

Ако нема генератора, губици се надокнађују на рачун смањења електромагнетске енергије.

Због тога су осцилације пригушене – амплитуда поља опада експоненцијално.

Фактор доброте

Одређује брзину којом се осцилације смањују. Што је фактор доброте већи пригушење је мање, а осцилатор (резонатор) квалитетнији.

$$Q = \frac{2\pi}{T}\frac{W_{\mathrm{tot}}}{P_{\mathrm{gub}}} = \omega_{\mathrm{r}}\frac{W_{\mathrm{tot}}}{P_{\mathrm{gub}}}\,.$$