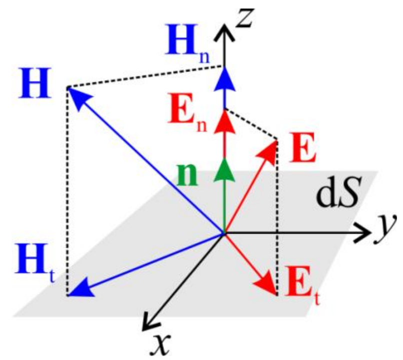
Посматрамо ближе члан $\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.



Слика 1.

Векторе електричног и магнетског поља можемо да раставимо на нормалну и тангенцијалну компоненту, као на слици 1. Правац нормалних компоненти се поклапа са правцем нормале, а тангенцијалне компоненте леже у равни на којој се налази површ dS

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_\mathrm{n}+\mathbf{E}_\mathrm{t},$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_\mathrm{n}+\mathbf{H}_\mathrm{t}.$$

Поинтингов вектор је одатле

$$\mathbf{E}\times\mathbf{H}=(\mathbf{E}_\mathrm{n}+\mathbf{E}_\mathrm{t})\times(\mathbf{H}_\mathrm{n}+\mathbf{H}_\mathrm{t})=\mathbf{E}_\mathrm{n}\times\mathbf{H}_\mathrm{n}+\mathbf{E}_\mathrm{n}\times\mathbf{H}_\mathrm{t}+\mathbf{E}_\mathrm{t}\times\mathbf{H}_\mathrm{n}+\mathbf{E}_\mathrm{t}\times\mathbf{H}_\mathrm{t}.$$

Осмотримо ближе сваки од чланова који се појављује у Поинтинговом вектору

$\mathbf{E}_\mathrm{n}\times\mathbf{H}_\mathrm{n}=0$

$\mathbf{E}_\mathrm{n}\times\mathbf{H}_\mathrm{t}$ лежи у тангенцијалној равни (управан је на вектор нормале)

$\mathbf{E}_\mathrm{t}\times\mathbf{H}_\mathrm{n}$ лежи у тангенцијалној равни (управан је на вектор нормале)

$\mathbf{E}_\mathrm{t}\times\mathbf{H}_\mathrm{t}$ паралелан је вектору нормале

Одатле следи да једино последњи члан доприноси флуксу Поинтинговог вектора на површи dS, односно

$$\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S=\oint_S (\mathbf{E}_\mathrm{t}\times\mathbf{H}_\mathrm{t})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

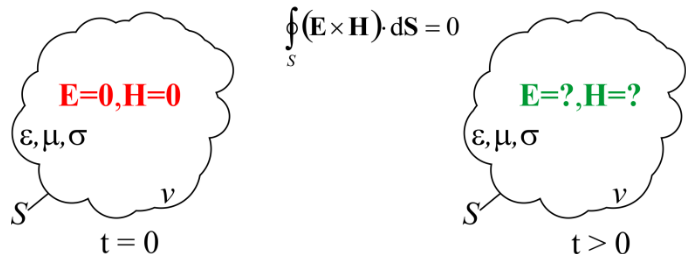
Флукс Поинтинговог вектора по некој површи једнак је нули ако су или тангенцијалана компонента магнетског поља или тангенцијална компонента електричног поља једнаке нули.

На површи савршеног проводника тангенцијална компонента електричног поља је увек нула па је и флукс Поинтинговог вектора нула!

Поинтингова теорема и закон одржања рада и енергије

Посматрамо домен v коначних димензија, који је обухваћен површи S. Средина је линеарна, параметара ε, μ и σ. **Домен је електромагнетски изолован од околине, а у домену нема генератора поља.**

Уколико у домену није постојало поље до тренутка $t = 0$, применом Поинтингове теореме показати да ће тако остати и када је $t > 0$.



Слика 2.

Поинтингова теорема у случају када нема генератора и размене енергије са околином гласи

$$0 = \int_v \sigma \|\mathbf{E}\|^2 \,\mathrm{d}v + \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{\varepsilon \|\mathbf{E}\|^2}{2} + \frac{\mu \|\mathbf{H}\|^2}{2} \right) \mathrm{d}v \ ,$$

односно

$$p_{\mathrm{J}}(t) = -\frac{\partial W\mathrm{tot}}{\partial t} \ .$$

При чему је флукс Поинтинговог вектора по површи која обухвата домен нула

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \, ,$$

јер је домен изолован.

С обзиром да је $p_{\mathrm{J}}(t) \geq 0$, следи да је $\frac{\partial W\mathrm{tot}}{\partial t} \leq 0$,

односно да енергија опада или је једнака нули.

Како је $W\mathrm{tot} \geq 0$, немогуће је да енергија опада. Одатле следи да се енергија не мења, тј. да је нула као што је била и до почентног тренутка.

$$\frac{\partial W\mathrm{tot}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow W\mathrm{tot} = 0 \, .$$

Овај закључак је логичан јер каже да се електромагнетско поље не може само од себе створити (ако нема генератора нити енергије која долази споља).

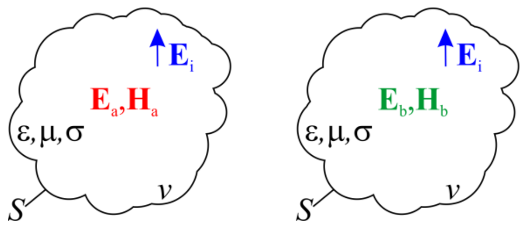
За даљи рад биће нам потребан формалан закључак који следи из овог разматрања.

Ако важи

$$0 = \int_v \sigma \|\mathbf{E}\|^2 \,\mathrm{d}v + \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{\varepsilon \|\mathbf{E}\|^2}{2} + \frac{\mu \|\mathbf{H}\|^2}{2} \right) \mathrm{d}v \ ,$$

као и да је $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{H} = 0$ до тренутка $t = 0$, онда следи да је $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{H} = 0$ и када је $t > 0$.

Теорема јединствености решења Максвелових једначина



Слика 2.

Да ли је могуће да у домену коначних димензија, постоје два различита решења Максвелових једначина ($\mathbf{E}_\mathrm{a},\mathbf{H}_\mathrm{a}$ и $\mathbf{E}_\mathrm{b},\mathbf{H}_\mathrm{b}$)?

Формулисаћемо најпре теорему јединствености решења у временском домену.

Додатна претпоставка је да су нам познати почетни услови, односно вредност поља у тренутку $t=0$.

Посматрамо домен *v* коначних димензија, који је обухваћен површи *S*.

Средина је линеарна, параметара ε, μ и σ, а генераторе моделујемо побудним пољем $\mathbf{E}_\mathrm{i}$.

Претпоставимо да у домену постоји електромагнетско поље $\mathbf{E}_\mathrm{a},\mathbf{H}_\mathrm{a}$, које задовољава Максвелове једначине

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_\mathrm{a} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}_\mathrm{a}}{\partial t} \ , \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_\mathrm{a} = \sigma(\mathbf{E}_\mathrm{a}+\mathbf{E}_\mathrm{i}) + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}_\mathrm{a}}{\partial t} \ . \tag{2}$$

Да ли је могуће да постоји још једно решење које такође задовољава Максвелове једначине?

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_\mathrm{b} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}_\mathrm{b}}{\partial t} \ , \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_\mathrm{b} = \sigma(\mathbf{E}_\mathrm{b}+\mathbf{E}_\mathrm{i}) + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}_\mathrm{b}}{\partial t} \ . \tag{4}$$

Да бисмо то испитали, одузећемо (3) од (1) и (4) од (2), те добијамо

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_\mathrm{a} - \operatorname{rot}\mathbf{E}_\mathrm{b} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}_\mathrm{a}}{\partial t} + \mu\frac{\partial \mathbf{H}_\mathrm{b}}{\partial t} , \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_\mathrm{a} - \operatorname{rot}\mathbf{H}_\mathrm{b} = \sigma(\mathbf{E}_\mathrm{a}-\mathbf{E}_\mathrm{b}) + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}_\mathrm{a}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}_\mathrm{b}}{\partial t} \ . \tag{6}$$

Побудно поље је нестало из Максвелових једначина јер је исто у оба случаја.

Када преуредимо једначине (5) и (6), следи да је

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{E}_\mathrm{a}-\mathbf{E}_\mathrm{b}\right)=-\mu\frac{\partial\left(\mathbf{H}_\mathrm{a}-\mathbf{H}_\mathrm{b}\right)}{\partial t}\,. \tag{7}$$

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{H}_\mathrm{a}-\mathbf{H}_\mathrm{b}\right)=\sigma\left(\mathbf{E}_\mathrm{a}-\mathbf{E}_\mathrm{b}\right)+\varepsilon\frac{\partial\left(\mathbf{E}_\mathrm{a}-\mathbf{E}_\mathrm{b}\right)}{\partial t}\,. \tag{8}$$

Дефинишимо векторе који представљају разлику два решења $\mathbf{E}=\mathbf{E}_\mathrm{a}-\mathbf{E}_\mathrm{b}$ и $\mathbf{H}=\mathbf{H}_\mathrm{a}-\mathbf{H}_\mathrm{b}$.

Преуређене једначине гласе

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\,, \tag{9}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{10}$$

Видимо да вектори разлике задовољавају Максвелове једначине у линеарној средини параметара ε, μ и σ, у којој нема извора поља.

Такође, оба решења морају да задовоље почетне услове

$$\mathbf{E}_\mathrm{a}\left(t=0\right)=\mathbf{E}_\mathrm{b}\left(t=0\right)=\mathbf{E}_0\,, \tag{11}$$

$$\mathbf{H}_\mathrm{a}\left(t=0\right)=\mathbf{H}_\mathrm{b}\left(t=0\right)=\mathbf{H}_0\,, \tag{12}$$

где су $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ познати почетни услови.

Одатле следи да је

$$\mathbf{E}\left(t=0\right)=0 \quad \text{и} \quad \mathbf{H}\left(t=0\right)=0\,. \tag{13}$$

Занима нас под којим условима су вектори $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ једнаки нули, односно када постоји само једно могуће решење?

Третирајући **E** и **H** на исти начин као "стварне" векторе елективног и магнетског поља, на основу (9) и (10), Поинтингова теорема гласи

$$0=\int_v\sigma\left\|\mathbf{E}\right\|^2\mathrm{d}v+\frac{\partial}{\partial t}\int_v\left(\frac{\varepsilon\left\|\mathbf{E}\right\|^2}{2}+\frac{\mu\left\|\mathbf{H}\right\|^2}{2}\right)\mathrm{d}v+\oint_S\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,. \tag{14}$$

На основу претходног примера (закон одржања рада и енергије) смо видели да када је $\oint_S\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=0$, односно када је испуњено

$$0=\int_v\sigma\left\|\mathbf{E}\right\|^2\mathrm{d}v+\frac{\partial}{\partial t}\int_v\left(\frac{\varepsilon\left\|\mathbf{E}\right\|^2}{2}+\frac{\mu\left\|\mathbf{H}\right\|^2}{2}\right)\mathrm{d}v\,,\ \mathbf{E}\left(t=0\right)=0\,,\ \mathbf{H}\left(t=0\right)=0\,. \tag{15}$$

следи да је $\mathbf{E}=0$ и $\mathbf{H}=0$ и када је $t>0$.

Потребан услов да би вектор разлике био нула, односно, да би оба решења била идентична је да буде испуњено

$$\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=0\,.$$

Раније смо видели да се тај услов своди на

$$\oint_S (\mathbf{E}_\mathrm{t}\times\mathbf{H}_\mathrm{t})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=0\;,$$

односно да је на граничној површи $\mathbf{E}_\mathrm{t}=0$ или $\mathbf{H}_\mathrm{t}=0$.

Свако решење које задовољава гранични услов за тангенцијалну компоненту електричног или магнетског поља на граници домена је једино могуће.

Теорема јединствености у простопериодичном режиму

Нека је ($\underline{\mathbf{E}}_a$, $\underline{\mathbf{H}}_a$) први скуп решења, а ($\underline{\mathbf{E}}_b$, $\underline{\mathbf{H}}_b$) други скуп решења.

Као и малопре, дефинишимо векторе који представљају разлике комплексних представника првог и другог решења.

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_a - \underline{\mathbf{E}}_b , \tag{16}$$

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_a - \underline{\mathbf{H}}_b . \tag{17}$$

Понтингова теорема у овом случају гласи

$$0 = \int_v \sigma \|\mathbf{E}\|^2 \,\mathrm{d}v + \mathrm{j}\omega \int_v \left(\mu \|\mathbf{H}\|^2 - \varepsilon \|\mathbf{E}\|^2\right) \mathrm{d}v + \oint_S \left(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} . \tag{18}$$

Ако је испуњено

$$\oint_S \left(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 , \tag{19}$$

Претходна једначина се своди на

$$0 = \int_v \sigma \|\mathbf{E}\|^2 \,\mathrm{d}v + \mathrm{j}\omega \int_v \left(\mu \|\mathbf{H}\|^2 - \varepsilon \|\mathbf{E}\|^2\right) \mathrm{d}v = 0 . \tag{20}$$

Први члан у изразу (20) је чисто реална величина, а други члан је чисто имагинаран.

Да би комплексна једнакост била задовољена, и реални и имагинарни део морају бити једнаки нули

$$\int_v \sigma \|\mathbf{E}\|^2 \,\mathrm{d}v = 0 , \tag{21}$$

$$\mathrm{j}\omega \int_v \left(\mu \|\mathbf{H}\|^2 - \varepsilon \|\mathbf{E}\|^2\right) \mathrm{d}v = 0 . \tag{22}$$

С обзиром да је $\sigma \|\mathbf{E}\|^2 \geq 0$, одатле следи да је $\mathbf{E} = 0$.

Уз услов $\mathbf{E} = 0$, из другог интеграла следи да је $\mathbf{H} = 0$.

Дакле, ако је испуњено $\oint_S \left(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$ на површи која обухвата домен, $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{H} = 0$.

Другим речима $\underline{\mathbf{E}}_a = \underline{\mathbf{E}}_b$ и $\underline{\mathbf{H}}_a = \underline{\mathbf{H}}_b$ тј. постоји само једно могуће решење.

Слично као и када смо посматрали временски домен, $\oint_S \left(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{t} = 0, \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{t} = 0$.

Неопходан услов да би решење било јединствено је позната тангенцијална компонента електричног или магнетског поља на површи која обухвата домен.

У случају када у домену нема губитака, из једнакости

$$\mathrm{j}\omega\int_v \left(\mu\|\mathbf{H}\|^2 - \varepsilon\|\mathbf{E}\|^2\right)\mathrm{d}v = 0,$$

не може да се закључи да је $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{H} = 0$ због тога што ову једнакост задовољавају и резонантни модови, те решење није јединствено.

Теорема ликова у брзопроменљивом пољу

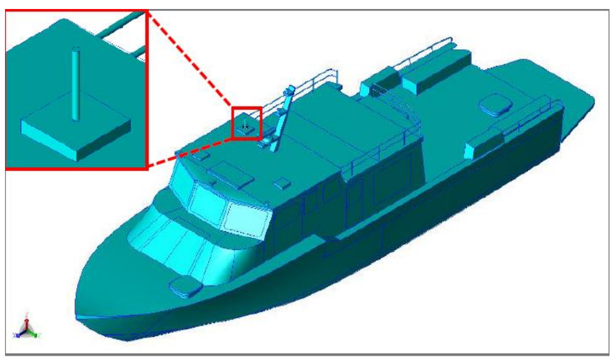
Једна од најважнијих примена теореме јединствености решења Максвелових једначина јесте теорема ликова у брзопроменљивом пољу.

Теорема ликова се примењује и у електростатици, стационарном струјном и стационарном магнетском пољу.

Без обзира на облик, циљ теореме ликова је проналажење еквивалентних извора (ликова) којима се замењују нехомогености у иначе хомогеној средини.

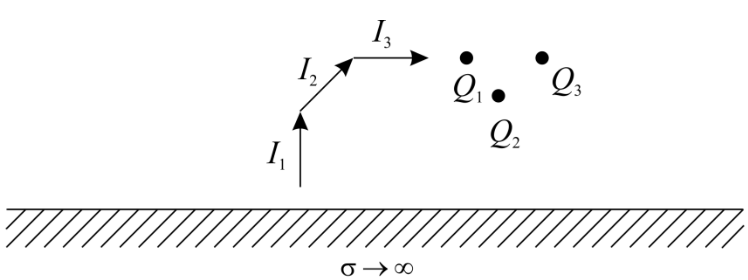
- У електростатици, утицај савршено проводне равни замењен је негативним ликовима наелектрисања који се налазе у вакууму.
- У стационарном струјном пољу, утицај непроводне средине је замењен позитивним ликовима електрода које се налазе у хомогеној земљи.
- У стационарном магнетском пољу, утицај феромагнетског блока је замењен позитивним ликовима струјних елемената који се налазе у вакууму.

Примене теореме ликова су бројне, нпр. пројектовање антена постављених на великим проводним равним површима (кров аутомобила, брода итд.), моделовање водова на штампаним плочама.



Слика 3. Илустрација теореме ликова.

Слика 4 приказује изворе електромагнетског поља у виду тачкастих **наелектрисања** и **струјних елемената** који се налазе у близини савршено проводне, бесконачно велике, равне плоче.



Слика 4.

На основу граничних услова, на површи плоче мора да важи $\mathbf{E}_t = 0$.

Након замене проводне плоче еквивалентним изворима, тангенцијална компонента електричног поља мора остати нула.

На основу општих израза за компоненте електричног поља које потичу од вишка наелектрисања и струја, респективно

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{q}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v}\underline{\rho}(\mathbf{r}')\mathrm{d}v\,\frac{(1+\mathrm{j}\beta R)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R^2}\mathbf{r}_0\,, \tag{1}$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}(\mathbf{r}) = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{A}} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu}{4\pi}\int_{v}\frac{\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\mathrm{d}v\,, \tag{2}$$

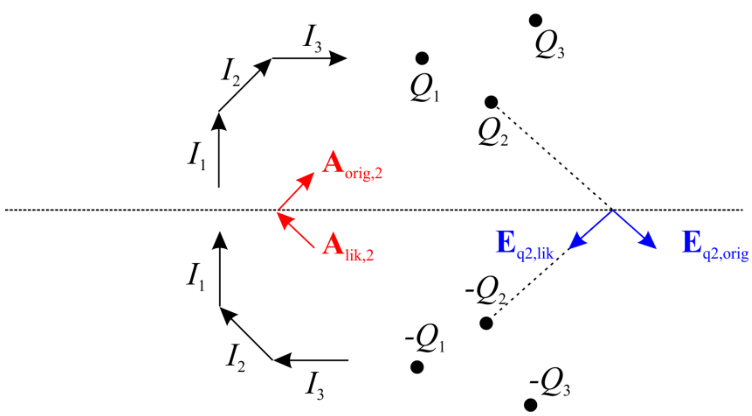
изрази за електрично поље тачкастог наелектрисања и струјног елемента су

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{q}}(\mathbf{r}) = \frac{\underline{Q}}{4\pi\varepsilon}\frac{(1+\mathrm{j}\beta R)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R^2}\mathbf{r}_0\,, \tag{3}$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}(\mathbf{r}) = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{A}} = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu\underline{I}\mathbf{h}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{4\pi R}\,, \tag{4}$$

где је **h** вектор чији је модул једнак дужини струјног елемента.

Одатле следи да еквивалентни извори, односно ликови, морају да изгледају као на слици 5.

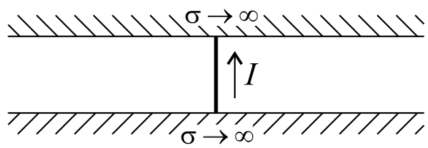


Слика 5.

Коначно, на основу теореме јединствености, следи да еквивалентни извори изабрани на овакав начин стварају идентично поље у простору изнад равни јер задовољавају услов за тангенцијалну компоненту електричног поља на граничној површи.

Пример:

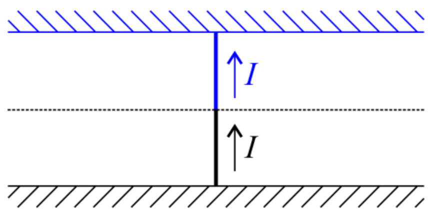
Између две бесконачно велике проводне равни налази се кратак вертикални проводник у коме постоји струја ефективне вредности I. Применом теореме ликова одредити еквивалентну слику.



Слика 6.

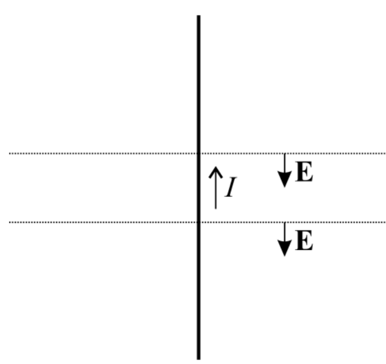
Решење:

Извршићемо најпре пресликавање у односу на горњу проводну раван. Поред проводника пресликава се и доња проводна раван коју третирамо као било који други проводник. Након прве примене теореме ликова добијамо ситуацију приказану на слици 7. Једина разлика у односу на оригиналну слику је што је проводник сада двоструко већи.



Слика 7.

Ако бисмо поновили пресликавање у односу на доњу проводну раван, добили бисмо проводник четири пута дужи од оригиналног који се опет налази између две проводне равни. Даљим пресликавањем долазимо до бесконачно дугачког проводника, као што је приказано на слици 8. Да је претпостављено решење тачно, потврђује теорема јединствености решења Максвелових једначина. Наиме, проводник са слике 8 ствара магнетски вектор потенцијал који је паралелан оси проводника. Самим тим је и индуковано електрично поље паралелно оси проводника, односно управно на проводне равни. У проводнику не постоји вишак наелектрисања јер се струја не мења дуж проводника, односно $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l}=0$. Самим тим је и одговарајућа компонента поља нула, односно укупно електрично поље је једнако индукованом електричном пољу. Одатле следи да је тангенцијална компонента поља нула, па је претпостављено решење једино могуће.



Слика 8.