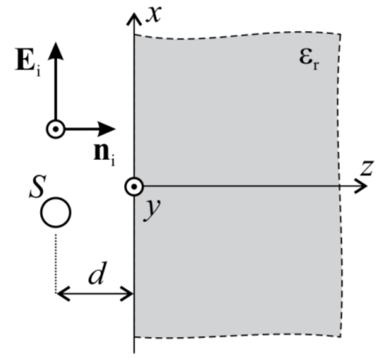
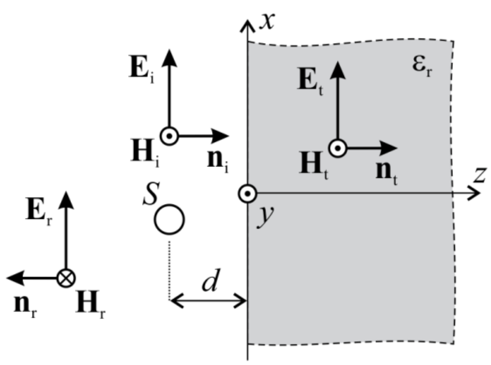
Испит, 9. јун 2016. Задатак 1

1. Инцидентни линијски поларизован ТЕМ талас, ефективне вредности електричног поља $E = 0{,}2\,\mathrm{V/m}$ и учестаности $f = 1\,\mathrm{GHz}$, наилази из вакуума нормално на бесконачну равну раздвојну површ са савршеним хомогеним немагнетским диелектриком, релативне пермитивности $\varepsilon_\mathrm{r} = 9$. Одредити изразе за комплексне векторе јачине електричног и магнетског поља у (а) вакууму и (б) диелектрику. (в) Израчунати ефективну вредност електромоторне силе индуковане у електрички малој кружној контури површине $S = 2\,\mathrm{cm}^2$, постављеној у вакууму нормално на вектор јачине магнетског поља инцидентног таласа, са центром на растојању $d = 5\,\mathrm{cm}$ од раздвојне површи.



Решење:

Инцидентни талас делимично прелази у диелектрик (трансмитовани талас), а делимично се рефлектује (рефлектовани талас), као на слици 1, где је $\mathbf{n}_\mathrm{i} = \mathbf{n}_\mathrm{t} = -\mathbf{n}_\mathrm{r} = \mathbf{i}_z$.



Слика 1. Инцидентни, рефлектовани и трансмитовани талас

Пошто није задата фаза електричног поља инцидентног таласа, усвајамо да је она нула у координатном почетку. Тада је електромагнетско поље инцидентног таласа:

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} = E\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\,\mathbf{i}_x = E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\,\mathbf{i}_x\,, \qquad (1)$$

$$\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i} = \frac{1}{Z_0}\mathbf{n}_\mathrm{i} \times \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} = \frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\,\mathbf{i}_y\,, \qquad (2)$$

где је $Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ импеданса вакуума и $\beta_0 = 2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ фазни коефицијент у вакууму.

Према усвојеним референтним смеровима, приказаним на слици 1, електромагнетско поље рефлектованог таласа је:

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r} = \underline{R}E\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_0 z}\,\mathbf{i}_x\,, \qquad (3)$$

$$\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i} = \frac{1}{Z_0}\mathbf{n}_\mathrm{r} \times \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r} = -\frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_0 z}\,\mathbf{i}_y\,, \qquad (4)$$

где је $R = \dfrac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$ коефицијент рефлексије и $Z = Z_0 \big/ \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}$ импеданса диелектрика, па је резултатнтно електромагнетско поље у вакууму (а):

$$\underline{\mathbf{E}}_0 = \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} + \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r} = E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\left(1 + R\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_0 z}\right)\mathbf{i}_x\,, \tag{5}$$

$$\underline{\mathbf{H}}_0 = \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i} + \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{r} = \frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\left(1 - R\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_0 z}\right)\mathbf{i}_y\,. \tag{6}$$

Електромагнетско поље у диелектрику је поље трансмитованог таласа (б):

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{t} = TE\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\,\mathbf{i}_x\,, \tag{7}$$

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{t} = T\frac{E}{Z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\,\mathbf{i}_y\,, \tag{8}$$

где је $T = \dfrac{2Z}{Z + Z_0}$ коефицијент трансмисије и $\beta = 2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}$ фазни коефицијент у диелектрику.

Ефективна вредност електромоторне силе (емс) индуковане у контури (пошто је контура електрички мала, сматрамо да је вектор јачине магнетског поља у свим тачкама равне површи ослоњене на контуру исти као у центру контуре) је:

$$\varepsilon = \left| -\mathrm{j}2\pi f\mu_0 \underline{H}_0(z = -d)S \right| = 2\pi f\mu_0\frac{E}{Z_0}S\left|\left(1 - R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta_0 d}\right)\right| \tag{9}$$

тј. након рачунања модула с десне стране,

$$\varepsilon = 2\pi f\mu_0\frac{E}{Z_0}S\sqrt{\left(1 - R\cos(2\beta_0 d)\right)^2 + \left(R\sin(2\beta_0 d)\right)^2} \tag{10}$$

што се, имајући у виду да је таласна дужина у вакууму $\lambda_0 = 2\pi/\beta_0 = 1\big/ f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = c_0/f$, може писати као:

$$\varepsilon = 2\pi\frac{E}{\lambda_0}S\sqrt{\left(1 - R\cos\left(4\pi\frac{d}{\lambda_0}\right)\right)^2 + \left(R\sin\left(4\pi\frac{d}{\lambda_0}\right)\right)^2}\,. \tag{11}$$

Уврштавањем бројних вредности у (10), добијамо (в)

$$\varepsilon = 0{,}725\,\mathrm{mV}\,. \tag{12}$$

Иначе, максимална ефективна вредност емс индуковаће се у случају да контура, осим што јој је површ нормална на вектор $\underline{\mathbf{H}}_0$, буде позиционирана тако да јој је центар у максимуму $\left|\underline{\mathbf{H}}_0\right|$. Ако коефицијент рефлексије напишемо у облику

$$R = |R|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} \tag{13}$$

где је

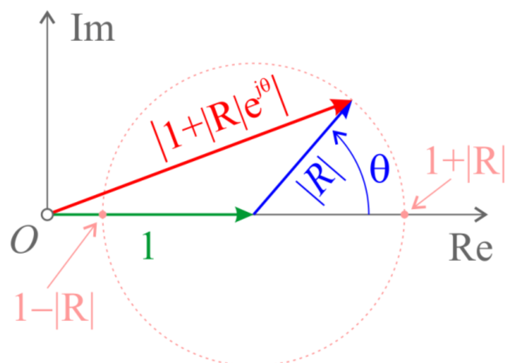
$$\phi = \begin{cases} 0, \ R \geq 0 \\ \pi, \ \mathrm{R} < 0 \end{cases}, \tag{14}$$

резултатнтно електромагнетско поље у вакууму, (5) и (6), можемо написати у облику:

$$\underline{\mathbf{E}}_0 = \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} + \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r} = E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\left(1 + |R|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi + 2\beta_0 z)}\right)\mathbf{i}_x = E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\left(1 + |R|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_\mathrm{E}}\right)\mathbf{i}_x, \tag{15}$$

$$\underline{\mathbf{H}}_0 = \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i} + \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{r} = \frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\left(1 + |R|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi + \phi + 2\beta_0 z)}\right)\mathbf{i}_y = \frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z}\left(1 + |R|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_\mathrm{H}}\right)\mathbf{i}_y\,. \tag{16}$$

На основу дијаграма у комплексној равни са слике 2, лако закључујемо да се максимални интензитет вектора $1 + |R|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ добија за $\theta = 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \ldots$ и износи $\left\| 1 + |R|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \right\|_{\max} = 1 + |R|$, а да се минимални интензитет вектора $1 + |R|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ добија за $\theta = \pi + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и износи $\left\| 1 + |R|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \right\|_{\max} = 1 - |R|$.



Слика 2. Дијаграм у комплексној равни

У нашем случају је $R < 0$, па је на основу (14) $\phi = \pi$, а , на основу 16, максимални интензитет вектора $\underline{\mathbf{H}}_0$ постиже се за $2\beta_0 z = 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \ldots$ и износи $\left|\underline{\mathbf{H}}_0\right|_{\max} = E/Z_0\left(1 + |R|\right)$.

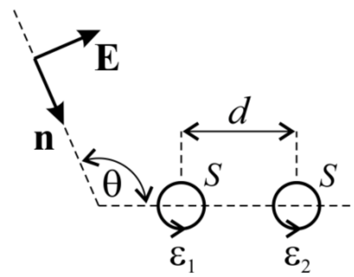
Лако је закључити и да је количник минималног и максималног интензитета вектора $\underline{\mathbf{E}}_0$ (као и вектора $\underline{\mathbf{H}}_0$):

$$SWR = \frac{1 + |R|}{1 - |R|}\,. \tag{17}$$

Овај количник познат је под називом коефицијент стојећих таласа (*SWR*–Standing Wave Ratio).

Испит, 29. август 2014. Задатак 2

Раван униформан простопериодичан линијски поларизован ТЕМ талас, непознате ефективне вредности електричног поља E и учестаности $f = 400\,\mathrm{MHz}$, простире се кроз вакуум у правцу и смеру орта $\mathbf{n}$ приказаног на слици. У пољу овог таласа налазе се две електрички мале контуре, једнаких површина $S = 12\,\mathrm{cm}^2$, чији су центри на растојању $d = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Контуре леже у равни паралелној вектору јачине електричног поља таласа, $\mathbf{E}$. Познате су комплексне индуковане електромоторне силе у контурама, $\underline{\varepsilon}_1 = 1\,\mathrm{mV}$ и $\underline{\varepsilon}_2 = 0{,}5\left(-1+\mathrm{j}\sqrt{3}\right)\mathrm{mV}$, у односу на референтне смерове приказане на слици. Израчунати: (а) угао θ ($\pi/2 \le \theta \le \pi$), приказан на слици, који заклапају правац орта $\mathbf{n}$ и правац на коме леже центри контура, и (б) ефективну вредности електричног поља таласа, E.



Решење:

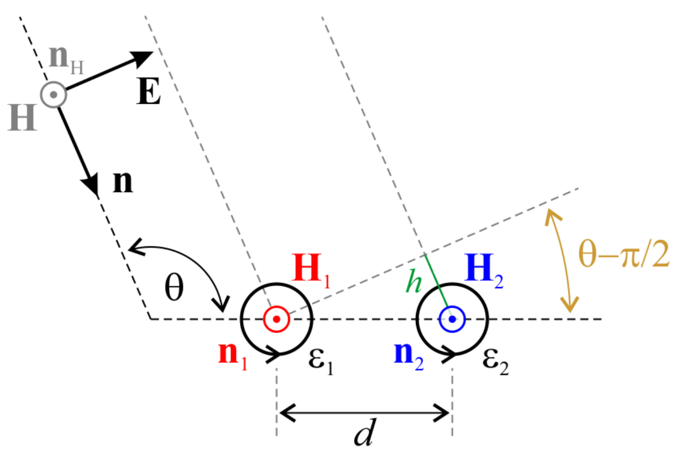
Вектор јачине магнетског поља таласа може се написати у облику

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z_0}\mathbf{n}\times\underline{\mathbf{E}} = \underline{H}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}_\mathrm{H} \qquad (1)$$

где је $\underline{H}_0$ комплексни представник вектора јачине магнетског поља у координатном почетку, $\beta = 2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ фазни коефицијент и $\mathbf{n}_\mathrm{H}$ јединични вектор у правцу и смеру вектора јачине магнетског поља, као на слици 1. При томе је

$$\left|\underline{H}_0\right| = E/Z_0\,, \qquad (2)$$

где је $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ импеданса вакуума.



Слика 1. Магнетско поље на месту контура

Електромоторна сила (емс) индукована у контури 1 је (контура је електрички мала, па сматрамо да је магнетско поље по површи контуре приближно исто као у њеном центру)

$$\underline{\varepsilon}_1 = -\mathrm{j}\omega\underline{\Phi}_1 = -\mathrm{j}\omega\mu_0\underline{\mathbf{H}}_1\cdot\mathbf{S}_1 = -\mathrm{j}\omega\mu_0\left(\underline{H}_1\mathbf{n}_\mathrm{H}\right)\left(S\,\mathbf{n}_1\right) = -\mathrm{j}\omega\mu_0\underline{H}_1 S\,, \qquad (3)$$

где је $\underline{\mathbf{H}}_1$ комплексни представник вектора јачине магнетског поља у центру контуре 1 и $\mathbf{n}_1$ јединични вектор, нормалан на површ контуре 1 и чији је смер са референтним смером емс те контуре везан правилом десне завојнице (при чему се са слике 1 види да је $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_\mathrm{H}$).

Са слике 1 се види да талас до контуре 2 пређе $h = d\sin(\theta-\pi/2) = -d\cos\theta$ дужи пут него до контуре 1, па је, на основу (1), комплексни представник вектора јачине магнетског поља у центру контуре 2:

$$\underline{\mathbf{H}}_2 = \underline{\mathbf{H}}_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta h} = \underline{\mathbf{H}}_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta d\sin(\theta-\pi/2)} = \underline{\mathbf{H}}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta d\cos\theta}\,. \quad (4)$$

Емс индукована у контури 2 стога је

$$\underline{\varepsilon}_2 = -\mathrm{j}\omega\underline{\Phi}_2 = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_2 \cdot \mathbf{S}_2 = -\mathrm{j}\omega\mu_0\left(\underline{\mathbf{H}}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta d\cos\theta}\right)\cdot \mathbf{S}_1 = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_1 \cdot \mathbf{S}_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta d\cos\theta} = \underline{\varepsilon}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta d\cos\theta}\,, \quad (5)$$

где је $\mathbf{S}_2 = S\mathbf{n}_2 = S\mathbf{n}_1 = \mathbf{S}_1$ и $\mathbf{n}_2$ јединични вектор, нормалан на површ контуре 2 и чији је смер са референтним смером емс те контуре везан правилом десне завојнице (при чему се са слике 1 види да је $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1$).

На основу (5) је разлика аргумената емс у контурама 2 и 1:

$$\arg(\underline{\varepsilon}_2) - \arg(\underline{\varepsilon}_1) = \beta d\cos\theta\,, \quad (6)$$

при чему треба имати на уму да је $\pi/2 \le \theta \le \pi$, односно да је десна страна (6) негативна. Коришћењем фазорског дијаграма емс, приказаног на слици 2, закључујемо да је

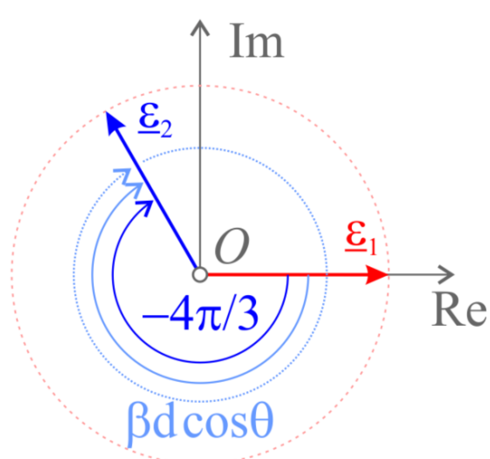
$$\beta d\cos\theta = -4\pi/3 - 2\pi k,\ k = 1,2,... \quad (7),$$

одакле добијамо два могућа решења за упадни угао, (а): $\theta = 109{,}46°$ (за $k=0$) и $\theta = 146{,}40°$ (за $k=1$).

Из (3) следи:

$$\left|\underline{\varepsilon}_1\right| = \omega\mu_0\left|\underline{H}_1\right|S = \omega\mu_0\left|\underline{H}_0\right|S = 2\pi f\mu_0\frac{E}{Z_0}S = 1\,\mathrm{mV} \quad (8)$$

одакле добијамо ефективну вредности електричног поља таласа, E, (б) $E = 99{,}43\,\mathrm{mV/m}$



Слика 2. Фазорски дијаграм емс