Предмет: **Електромагнетика (ОТ)**
Шифра: **13Е072ТЕМ**
Асистент: Никола Баста

НАСТАВА НА ДАЉИНУ

ВЕЖБЕ, 10. СЕДМИЦА, 13-19. АПРИЛ 2020.

Литература:
[1] Б. М. Нотарош, В. В. Петровић, М. М. Илић, А. Р. Ђорђевић, Б. М. Колунџија, М. Б. Драговић, „Збирка испитних питања и задатака из Електромагнетике“, Академска мисао, Београд, 2008.
[2] Испитни задаци са претходних рокова, http://em.etf.rs/rokovi.htm

Поларизација простопериодичних вектора

Наш задатак је да се боље упознамо са простопериодичним векторима и да из њихове представе у временском или фреквенцијском (комплексном) домену очитамо основне карактеристике, као што су минимална, максимална и ефективна вредност.

Посматрајмо временски променљив вектор чије су компоненте простопериодичне функције времена произвољних фаза. У временском домену (ВД) имамо

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t)\,\mathbf{i}_x + A_y(t)\,\mathbf{i}_y + A_z(t)\,\mathbf{i}_z$$
$$= \sqrt{2}A_{0x}\cos(\omega t + \theta_x)\mathbf{i}_x + \sqrt{2}A_{0y}\cos(\omega t + \theta_y)\mathbf{i}_y + \sqrt{2}A_{0z}\cos(\omega t + \theta_z)\mathbf{i}_z. \qquad \text{ВД}$$

Преласком у фреквенцијски домен (ФД), следи

$$\underline{\mathbf{A}} = A_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_x}\,\mathbf{i}_x + A_{0y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_y}\,\mathbf{i}_y + A_{0z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_z}\,\mathbf{i}_z \qquad \text{ФД}$$
$$\underline{\mathbf{A}} = A_{0x}(\cos\theta_x + \mathrm{j}\sin\theta_x)\mathbf{i}_x + A_{0y}(\cos\theta_y + \mathrm{j}\sin\theta_y)\mathbf{i}_y + A_{0z}(\cos\theta_z + \mathrm{j}\sin\theta_z)\mathbf{i}_z$$
$$\underline{\mathbf{A}} = \overbrace{A_{0x}\cos\theta_x\mathbf{i}_x + A_{0y}\cos\theta_y\mathbf{i}_y + A_{0z}\cos\theta_z\mathbf{i}_z}^{\mathbf{A}_{\mathrm{re}}} + \mathrm{j}\underbrace{\left(A_{0x}\sin\theta_x\mathbf{i}_x + A_{0y}\sin\theta_y\mathbf{i}_y + A_{0z}\sin\theta_z\mathbf{i}_z\right)}_{\mathbf{A}_{\mathrm{im}}}.$$

Комплексни облик нашег вектора је

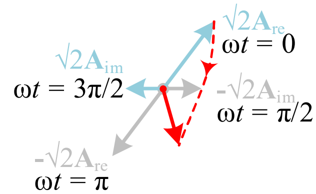
$$\boxed{\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\mathrm{re}} + \mathrm{j}\mathbf{A}_{\mathrm{im}}}.$$

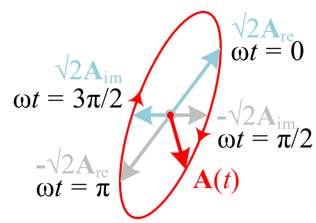
Обратимо пажњу да су вектори $\mathbf{A}_{\mathrm{re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{im}}$, чисто реални вектори, тј. $\mathbf{A}_{\mathrm{re}}, \mathbf{A}_{\mathrm{im}} \in \mathcal{R}^3$. Враћањем у ВД, добијамо израз

ВД

$$\mathbf{A}(t) = \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{re}} \cos \omega t - \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{im}} \sin \omega t\,,$$

где векторе $\mathbf{A}_{\mathrm{re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{im}}$ можемо интерпретирати као *векторску ефективну вредност*. (ово није стручан израз, већ интерпретација). Ако пажљиво анализирамо израз у ВД, видимо да он никад нема вредност нула! На првој слици са десне стране, светлоплавом бојом означени су произвољни вектори $\sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{re}}$ и $\sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{im}}$, (у временском домену посматрамо *векторске амплитуде*, па отуд $\sqrt{2}$), а сивом бојом означени су негативни вектори $-\sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{re}}$ и $-\sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{im}}$. У моменту $t = 0$, $\mathbf{A}(t) = \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{re}}$. Како мењамо аргумент ωt, врх резултантног вектора $\mathbf{A}(t)$, почиње да описује планарну криву у простору, дефинисану датим векторима. Показује се да је та крива елипса (друга слика). То није на први поглед интуитивно јасно. Међутим, доказ ћемо спровести у наставку.



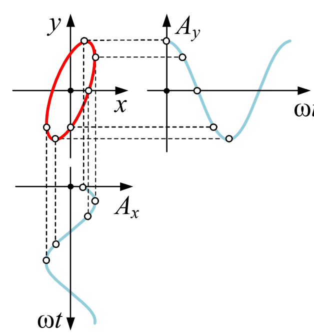


Погледајмо најпре пример вектора датог у ВД,

$$\mathbf{A}(t) = \sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\mathbf{i}_x + 2\sqrt{2}\cos\omega t\,\mathbf{i}_y\,.$$

Вежбе ради, одредимо његовог комплексног представника.

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_x + 2\mathbf{i}_y = \overbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_x + 2\mathbf{i}_y\right)}^{\mathbf{A}_{\mathrm{re}}} + \mathrm{j}\overbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_x\right)}^{\mathbf{A}_{\mathrm{im}}}.$$



Временске функције x- и y- компоненти датог вектора, као и поступак формирања елипсе суперпозицијом, дати су на трећој слици. Овако *нагнуту* елипсу није лако анализирати, а заинтересовани смо за екстремуме вектора, тј. за дужину мале и велике полуосе. Поставља се питање, како можемо израчунати дужине полуоса? Посматрајмо сличан комплексни вектор $\underline{\mathbf{B}}$, који је за угао α фазно померена верзија вектора $\underline{\mathbf{A}}$.

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{A}}e^{\mathrm{j}\alpha} &= (\mathbf{A}_{\mathrm{re}} + \mathrm{j}\mathbf{A}_{\mathrm{im}})\cdot(\cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha)\\ &= (\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\cos\alpha - \mathbf{A}_{\mathrm{im}}\sin\alpha) + \mathrm{j}(\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\sin\alpha + \mathbf{A}_{\mathrm{im}}\cos\alpha)\\ &= \mathbf{B}_{\mathrm{re}} + \mathrm{j}\mathbf{B}_{\mathrm{im}}\,.\end{aligned}$$

Да ли постоји такав угао α, за који су реални и имагинарни део новог вектора $\underline{\mathbf{B}}$ ортогонални? Ако би они били ортогонални, из израза у ВД, можемо уочити да би ти вектори, помножени са $\sqrt{2}$ управо били једнаки великој и малој полуоси елипсе коју описује врх вектора $\mathbf{B}(t)$,

$$\mathbf{B}(t)=\sqrt{2}\mathbf{B}_{\mathrm{re}}\cos\omega t-\sqrt{2}\mathbf{B}_{\mathrm{im}}\sin\omega t\,.$$

Хајде да то аналитички испитамо. Претпоставимо да постоји угао α, тако да је $\mathbf{B}_{\mathrm{re}}\cdot\mathbf{B}_{\mathrm{im}}=0$. Онда на основу претходних израза за $\mathbf{B}_{\mathrm{re}}\cdot$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{im}}$ следи прорачун угла,

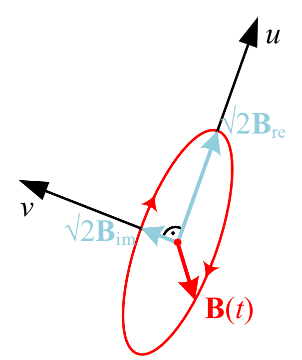
$$\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\mathbf{A}_{\mathrm{im}}\cos^2\alpha+\left|\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\right|^2\cos\alpha\sin\alpha-\left|\mathbf{A}_{\mathrm{im}}\right|^2\cos\alpha\sin\alpha-\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\mathbf{A}_{\mathrm{im}}\sin^2\alpha=0$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(\left|\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\right|^2-\left|\mathbf{A}_{\mathrm{im}}\right|^2\right)+\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\mathbf{A}_{\mathrm{im}}\cos 2\alpha=0$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\mathbf{A}_{\mathrm{im}}}{\left|\mathbf{A}_{\mathrm{im}}\right|^2-\left|\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\right|^2}$$

$$\boxed{\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\mathbf{A}_{\mathrm{im}}}{\left|\mathbf{A}_{\mathrm{im}}\right|^2-\left|\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\right|^2}\right)}\text{, где је }\left|\mathbf{A}_{\mathrm{im}}\right|\neq\left|\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\right|.$$

(Ако је $\left|\mathbf{A}_{\mathrm{im}}\right|=\left|\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\right|$ је у питању кружна поларизација, одатле следи да је испуњено $\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{im}}=0\wedge\left|\mathbf{A}_{\mathrm{re}}\right|=\left|\mathbf{A}_{\mathrm{im}}\right|$, тј. реални и имагинарни део су већ ортогонални)



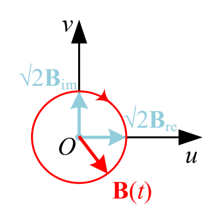
Како су за добијени угао α, вектори $\mathbf{B}_{\mathrm{re}}\cdot$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{im}}$ ортогонални (слика десно), увођењем помоћног координатног система (u,v) можемо изразити компоненте резултантног вектора

$$B_u(t)=\sqrt{2}\left|\mathbf{B}_{\mathrm{re}}\right|\cos\omega t$$

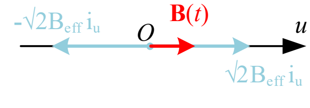
$$B_v(t)=-\sqrt{2}\left|\mathbf{B}_{\mathrm{im}}\right|\sin\omega t$$

Трансформацијом израза, добијамо једначину елипсе

$$\left(\frac{B_u(t)}{\sqrt{2}\left|\mathbf{B}_{\mathrm{re}}\right|}\right)^2+\left(\frac{B_v(t)}{\sqrt{2}\left|\mathbf{B}_{\mathrm{im}}\right|}\right)^2=1\,.$$



У општем случају, поларизација простопериоидчних вектора је елиптична (врх вектора описује елипсу). Специјални случајеви јесу кружна поларизација, када је $\mathbf{B}_{\mathrm{re}}\cdot\mathbf{B}_{\mathrm{im}}=0\wedge\left|\mathbf{B}_{\mathrm{re}}\right|=\left|\mathbf{B}_{\mathrm{im}}\right|$, и линеарна поларизација, када је $\mathbf{B}_{\mathrm{re}}\times\mathbf{B}_{\mathrm{im}}=0$ (реални и имагинарни део вектора су истог правца).



Одређивање ефективне вредности простопериодичног вектора

Полазимо од познатог израза (корен из средње вредности квадрата)

$$A_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\overline{\left(\left|\mathbf{A}_x(t)\right|^2 + \left|\mathbf{A}_y(t)\right|^2 + \left|\mathbf{A}_z(t)\right|^2 \right)}} = \sqrt{\overline{\left|\mathbf{A}_x(t)\right|^2} + \overline{\left|\mathbf{A}_y(t)\right|^2} + \overline{\left|\mathbf{A}_z(t)\right|^2}} \,,$$

где је

$\overline{\left|\mathbf{A}_x(t)\right|^2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \left(\sqrt{2}A_{0x}\cos(\omega t + \theta_x)\right)^2 \mathrm{d}t = A_{0x}^2$. Аналогно за A_{0y} и A_{0z}.

Коначно,

$$\boxed{A_{\mathrm{eff}} = \sqrt{A_{0x}^2 + A_{0y}^2 + A_{0z}^2}}$$

Приметимо да ефективна вредност не зависи од фазе, јер су у питању ортогонални вектори.

Испитни задатак.
Одредити минимални и максимални интензитет, као и ефективну вредност простопериодичног вектора датог комплексним изразом $\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{i}_x + \mathrm{j}2\mathbf{i}_y + 3\mathbf{i}_z$.

РЕШЕЊЕ:
Одредимо тражене величине у временском домену. Најпре,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t) &= \sqrt{2}\cdot 1\cdot \cos\omega t\,\mathbf{i}_x + \sqrt{2}\cdot 2\cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i}_y + \sqrt{2}\cdot 3\cos\omega t\,\mathbf{i}_z \\ &= \sqrt{2}\cos\omega t\,\mathbf{i}_x - 2\sqrt{2}\sin\omega t\,\mathbf{i}_y + 3\sqrt{2}\cos\omega t\,\mathbf{i}_z\end{aligned}$$

Тренутна вредност интензитета вектора је

$$\left|\mathbf{A}(t)\right| = \sqrt{2\cos^2\omega t + 8\sin^2\omega t + 18\cos^2\omega t} = \sqrt{8 + 12\cos^2\omega t}\,.$$

Да ли је ово ПП функција?

Минималну, ефективну и максималну вредност интензитета рачунамо тако што дискутујемо по параметру ωt,

$$A_{\max} = \sqrt{8 + 12\cos^2\omega t}\,\Big|_{\omega t = 0} = \sqrt{20}$$

$$A_{\min} = \sqrt{8 + 12\cos^2\omega t}\,\Big|_{\omega t = \pi/2} = \sqrt{8}$$

$$A_{\mathrm{eff}} = \sqrt{8 + 12\overline{\cos^2 \omega t}} = \sqrt{8 + 12 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{14}$$

Домаћи:
Урадити задатак у фреквенцијском (комплексном) домену.

Испитни задатак.
Одредити минимални и максимални интензитет, као и ефективну вредност простопериодичног вектора датог комплексним изразом $\underline{\mathbf{A}} = (1 + \mathrm{j})\mathbf{i}_x + \mathrm{j}\mathbf{i}_y + \left(2 - \mathrm{j}\frac{1}{2}\right)\mathbf{i}_z$.

РЕШЕЊЕ:
Очигледно да овај вектор нема канониччне фазне аргументе појединачних компоненти. Ако га представимо у ВД, имамо

$$\mathbf{A}(t) = 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\mathbf{i}_x - \sqrt{2}\sin\omega t\,\mathbf{i}_y + \sqrt{\frac{17}{2}}\cos(\omega t - \mathrm{arctg}(1/4))\mathbf{i}_z ,$$

што није згодно за сређивање. Остаје да у ФД покушамо да анализирамо реални и имагинарни део вектора.

$\mathbf{A}_{\mathrm{re}} = (1, 0, 2)$,
$\mathbf{A}_{\mathrm{im}} = (1, 1, -1/2)$.

Уочавамо да је $\mathbf{A}_{\mathrm{re}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{im}} = 0$, па на основу теорије у претходном одељку, закључујемо да $\sqrt{2}A_{\mathrm{re}}$ и $\sqrt{2}A_{\mathrm{im}}$ одговарају малој и великој полуоси елипсе. Интензитети реалног и имагинарног дела су

$$A_{\mathrm{re}} = |\mathbf{A}_{\mathrm{re}}| = \sqrt{5}$$
$$A_{\mathrm{im}} = |\mathbf{A}_{\mathrm{im}}| = \frac{3}{2}$$

$$A_{\max} = \sqrt{2}A_{\mathrm{re}} = \sqrt{10}$$
$$A_{\min} = A_{\mathrm{im}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{\mathrm{eff}} = \sqrt{1 + 1 + 1 + 4 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

(Приметимо да важи једнакост $A_{\mathrm{eff}} = \sqrt{A_{\mathrm{re}}^2 + A_{\mathrm{im}}^2}$, што је тачно само у случају ортогоналности реалног и имагинарног дела вектора)

Задатак 306.
У задатку се илуструје извођење таласне једначине за електрично поље. Максвелове једначине за линеарну средину гласе:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Ако применимо оператор ротора на прву једначину, добијамо

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{E}) = -\mu\left(\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{H}\right)$$
$$\operatorname{grad}\left(\overbrace{\operatorname{div}\mathbf{E}}^{=0}\right) - \Delta\mathbf{E} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

Коначно,

$$\Delta\mathbf{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Ову таласну једначину задовољава произвољна функција закашњеног аргумента времена, $t - z/c$,

$$\mathbf{E}(t) = E_0 f\left(t - \frac{z}{c}\right)\mathbf{i}_x, \text{ где је } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Домаћи:
- Проверити да ли функција $\mathbf{E}(t)$ заиста задовољава таласну једначину.
- Проверити да ли је $\operatorname{div}\mathbf{E}(t) = 0$.
- Поновити задатак у комплексном домену.
- Урадити задатак 307.

Задатак 309а.
Навести основне особине равних униформних ТЕМ таласа који се простире криз линеарну средину без губитака, параметара ε и μ.

РЕШЕЊЕ:

1. Вектори $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ су управни на правац простирања и међусобно. Правац простирања одређен је Поинтинговим вектором $\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$.

2. Вектори $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ су константни у равнима нормалним на правац

простирања.

3. Количник тренутних интензитета вектора $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ је константан у свакој тачки средине,

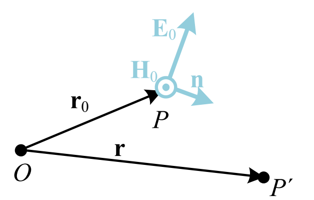
$$\frac{|\mathbf{E}(t)|}{|\mathbf{H}(t)|} = \mathrm{const} = Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},$$

где се Z назива импеданса средине. (за вакуум $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377\,\Omega$)

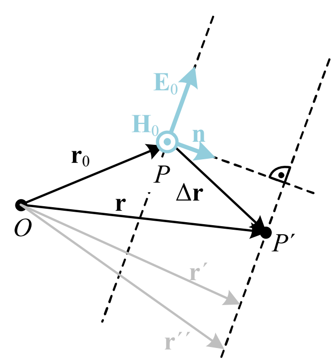
4. Брзина простирања таласа је $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Домаћи:
Урадити тачке (б) и (в) задатка 309.

Задатак 311 - варијанта.
Раван униформан ТЕМ талас, угаоне учестаности ω простире се у вакууму у правцу и смеру орта $\mathbf{n}$. Познат је комплексни вектор јачине електричног поља овог таласа у тачки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0) = \underline{\mathbf{E}}_0$, где је $\underline{\mathbf{E}}_0$ комплексна константа.
Одредити комплексне векторе јачине електричног и магнетског поља у произвољној тачки простора.



РЕШЕЊЕ:
Ефективна вредност прогресивног равног таласа је константа у целом простору. Разлика у вредности комплексног представника поља између две тачке се огледа у *фазној разлици*. Посматрајмо задати талас и његове фазне равни (испрекидане линије). Фазна разлика између две равни је једнака докле год је прва тачка на првој равни, а друга на другој. Фазна разлика одговара *растојању* између те две равни, тј. путу који је талас прешао, d (слика),

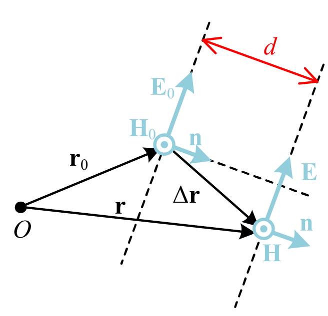


$$\Delta\phi = \beta d .$$

Растојање је, са друге стране, једнако *пројекцији* вектора који одговара промени положаја $\Delta\mathbf{r}$, који се дефинише у односу на неку референтну тачку $\mathbf{r}_0$,

$$d = \Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}$$

(пројекција је одређена скаларним производом)



Одредимо најпре комплексни вектор јачине електричног поља. Вектор електричног поља у произвољној тачки $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ и вектор поља у референтној тачки $\underline{\mathbf{E}}_0$ ће се, на основу претходне анализе, разликовати само у фазном фактору, који представља множење одговарајућом експоненцијалном функцијом, $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{E}}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Delta\phi}$. Следи да је,

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{E}}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}}}$$

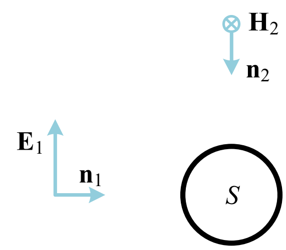
На основу особина ТЕМ таласа одређујемо вектор јачине магнетског поља као

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_0}\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \text{ (! важна једначина)}$$

Коначно,

$$\boxed{\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_0}\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{E}}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}}}\ .$$

Задатак 319.
Задатак илуструје суперпозицију два равна ТЕМ таласа исте угаоне учестаности ω, који се простиру дуж ортогоналних праваца. У њиховом резултантном пољу налази се мала контура површине S. Познати су ефективне вредности електричног поља првог таласа E_1 и магнетског поља другог таласа H_2. На месту контуре електрично поље првог таласа фазно предњачи електричном пољу другог таласа за $\pi/2$. Задатак је одредити ефективну вредност индуковане емс у контури.

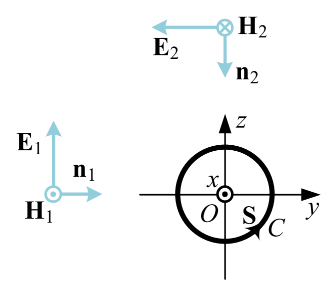


РЕШЕЊЕ:
Потребно је најпре усвојити координатни систем. Најпогодније је да у тачку од интереса (центар контуре) сместимо координатни почетак, јер онда не морамо да бринемо о пропагацији (експоненцијалном фактору). Према координатном систему са слике и тексту задатка, електрично поље у центру контуре је

$$\underline{\mathbf{E}}_1(0,0,0) = E_1\,\mathbf{i}_z\,,$$

где бирамо да је почетна фаза електричног поља нула. Како електрично поље првог таласа у односу на поље другог предњачи на том месту за $\pi/2$, то је исто као да електрично поље другог таласа касни за $\pi/2$, тј.

$$\underline{E}_2 = -\mathrm{j}E_2\,.$$



С обзиром да електрично и магнетско поље имају линеарни однос преко импедансе средине, која је за вакуум реални број, онда је $\underline{H}_2 = \underline{E}_2 / Z_0$. Следи да магнетско поље фазно *прати* електрично, па је

$$\underline{\mathbf{H}}_2(0,0,0) = -\mathrm{j}H_2 \overbrace{(-\mathbf{i}_x)}^{\substack{\text{реф. смер} \\ \text{са слике}}} .$$

На основу ових израза, вежбе ради, написаћемо изразе за све компоненте електромагнетског поља у целом простору. За први талас је

$$\underline{\mathbf{E}}_1 = \overbrace{E_1}^{\substack{\text{На основу} \\ \text{текста задатка}}} \cdot \overbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta y}}^{\substack{\text{са слике -} \\ \text{пропагација дуж + y осе}}} \cdot \overbrace{\mathbf{i}_z}^{\text{са слике очитано}}$$

$$\underline{\mathbf{H}}_1 = \frac{1}{Z_0}\mathbf{n}\times\underline{\mathbf{E}}_1 = \overbrace{\frac{E_1}{Z_0}}^{\substack{\text{иста фаза као} \\ \text{код ел. поља}}} \cdot \overbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta y}}^{\substack{\text{иста пропагација} \\ \text{као код ел. поља}}} \cdot \overbrace{\mathbf{i}_x}^{\substack{\text{одр. аналитички} \\ \text{или очитано са слике}}} .$$

На сличан начин одређујемо компоненте другог таласа

$$\underline{\mathbf{H}}_2 = -\mathrm{j}H_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}(-\mathbf{i}_x) ,$$
$$\underline{\mathbf{E}}_2 = -\mathrm{j}Z_0H_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}(-\mathbf{i}_y) .$$

Сада можемо одредити индуковану емс у комплексном облику за референтни смер контуре, односно оријентисане површи $\mathbf{S} = S\,\mathbf{i}_x$, као са слике

$$\underline{\varepsilon}_{\mathrm{ind}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\Phi} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\mathbf{S}\cdot\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{rez}}\Big|_{\mathbf{r}=(0,0,0)} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\mathbf{S}\cdot\left(\underline{\mathbf{H}}_1+\underline{\mathbf{H}}_2\right)\Big|_{\mathbf{r}=(0,0,0)} .$$
$$\underline{\varepsilon}_{\mathrm{ind}} = -\mathrm{j}\omega\mu_0 S\left(\frac{E_1}{Z_0}+\mathrm{j}H_2\right)$$

Коначно,

$$\boxed{\varepsilon_{\mathrm{ind}} = \omega\mu_0 S\sqrt{\left(\frac{E_1}{Z_0}\right)^2 + H_2^2}}$$

Домаћи:
Урадити задатак 317.

Сва питања у вези са наставним материјалом студенти могу да упуте предметном наставнику електронском поштом на nbasta@etf.rs .