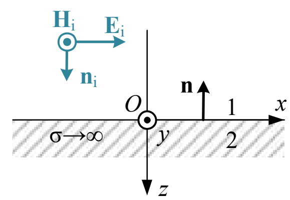
Предмет: **Електромагнетика (ОТ)**
Шифра: **13Е072ТЕМ**
Асистент: Никола Баста

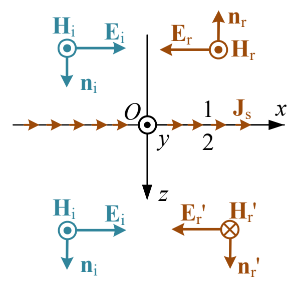
НАСТАВА НА ДАЉИНУ

ВЕЖБЕ, 11. СЕДМИЦА, 20-26. АПРИЛ 2020.

Литература:
[1] Б. М. Нотарош, В. В. Петровић, М. М. Илић, А. Р. Ђорђевић, Б. М. Колунџија, М. Б. Драговић, „Збирка испитних питања и задатака из Електромагнетике“, Академска мисао, Београд, 2008.
[2] Испитни задаци са претходних рокова, http://em.etf.rs/rokovi.htm

Задатак 330.
У задатку се илуструје интеракција равног ТЕМ таласа са савршено проводном равни. Када се савршено проводна раван *обасја* равним униформним ТЕМ таласом (прва слика), као реакција јављају се тзв. секундарни извори ЕМ поља на раздвојној површи.
Конкретно, у овом задатку, на раздвојној површи појављују се површинске струје (бесконачни струјни плашт) које стварају два нова ТЕМ таласа (друга слика).
Први талас је истог правца и смера простирања као и инцидентни, али са супротним предзнаком комплексних представника вектора јачине електричног и магнетског поља. На тај начин обезбеђено је да у савршеном проводнику ЕМ поље буде једнако нули.
Други талас који настаје, истог је правца, али супротног смера у односу на инцидентни. Он се назива рефлектовани талас и у суперпозицији са инцидентним, даје резултантни талас у средини 1, који мора задовољавати граничне услове на раздвојној површи.





(а) Одређивање резултантног ЕМ поља изнад равни

Најпре усвајамо координатни систем и референтни смер за вектор инцидентног електричног поља. Вектор магнетског поља може се добити аналитички или очитати са слике.

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} = \overbrace{E}^{\text{На основу текста задатка}} \cdot \overbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}}^{\text{са слике - пропагација дуж } +z \text{ осе}} \cdot \overbrace{\mathbf{i}_x}^{\text{са слике очитано}},$$

$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{i}} = \frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \cdot \overbrace{\mathbf{i}_y}^{\text{са слике очитано или аналитички}} \left(= \frac{1}{Z_0}\mathbf{n}_{\mathrm{i}} \times \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} \right),$$

Затим можемо усвојити референтни правац и смер за векторе рефлектованог таласа. Он је такође ТЕМ талас, па из вектора електричног поља, директно следи и вектор магнетског. За усвојене референтне смерове, потребно је одредити комплексне представнике ЕМ поља рефлектованог таласа. Полази се од граничних услова. За електрично поље имамо

$$\mathbf{n}\times\left(\underline{\mathbf{E}}_1-\underline{\mathbf{E}}_2\right)=0\,,$$
$$(-\mathbf{i}_z)\times\left(\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}+\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}-0\right)=0\,,$$
$$\Rightarrow\left(\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}+\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}\right)_\mathrm{tan}=0\,.$$

Како су вектори електричног поља тангенцијални на раван, следи

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}\big|_{z=0}=-\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}\big|_{z=0}\quad\Rightarrow\quad \underline{E}_\mathrm{i}=\underline{E}_\mathrm{r}=E\text{ , за дате референтне смерове.}$$

Одавде можемо изразити ЕМ поље рефлектованог таласа,

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}=E\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}(-\mathbf{i}_x)\,,$$
$$\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{r}=\frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}\mathbf{i}_y\,.$$

Укупно резултантно поље у вакууму у комплексном домену је

$$\underline{\mathbf{E}}_1=\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}+\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}=E\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}\right)\mathbf{i}_x=-\mathrm{j}2E\sin(\beta z)\,\mathbf{i}_x\,,$$
$$\underline{\mathbf{H}}_1=\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i}+\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{r}=\frac{E}{Z_0}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}\right)\mathbf{i}_y=2\frac{E}{Z_0}\cos(\beta z)\,\mathbf{i}_y\,,$$

а у временском

$$\mathbf{E}_1(z,t)=2\sqrt{2}E\sin(\beta z)\sin(\omega t)\,\mathbf{i}_x\,,$$
$$\mathbf{H}_1(z,t)=2\sqrt{2}\,\frac{E}{Z_0}\cos(\beta z)\cos(\omega t)\,\mathbf{i}_y\,.$$

Функције поља одговарају *стојећем таласу* (подсетити се појма механичког стојећег таласа на жици, чворова, трбуха итд.).

(б) Одређивање расподеле индукованог наелектрисања и струја на равни

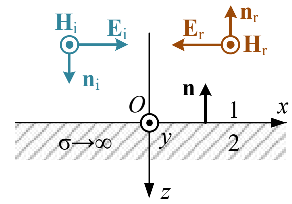
Како је електрично поље тангецијално на раван, из граничних услова за вектор електричне индукције следи

$$\underline{\rho}_\mathrm{s}=\mathbf{n}\cdot(\underline{\mathbf{D}}_1-\underline{\mathbf{D}}_2)\big|_{z=0}=(-\mathbf{i}_z)\cdot\varepsilon_0\underline{\mathbf{E}}_1\big|_{z=0}=0\,.$$

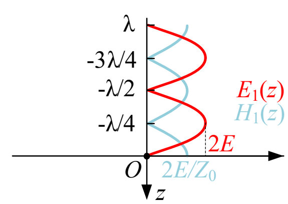
Из граничног услова за вектор магнетског поља,

$$\underline{\mathbf{J}}_\mathrm{s}=\mathbf{n}\times(\underline{\mathbf{H}}_1-\underline{\mathbf{H}}_2)\big|_{z=0}=(-\mathbf{i}_z)\times\underline{\mathbf{H}}_1\big|_{z=0}=2\frac{E}{Z_0}\mathbf{i}_x$$

$(\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_\mathrm{i}+\mathbf{E}_\mathrm{r},\ \mathbf{H}_1=\mathbf{H}_\mathrm{i}+\mathbf{H}_\mathrm{r})$



$(\mathbf{E}_2=0,\ \mathbf{H}_2=0)$



(в) Одређивање тренутне вредности густине електромагнетске енергије

$$w_{\text{em}}(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left|\mathbf{E}_1(z,t)\right|^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \left|\mathbf{H}_1(z,t)\right|^2 =$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot 8E^2 \sin^2(\beta z)\sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}\cdot 8\mu_0 \frac{E^2}{\underbrace{Z_0^2}_{\mu_0/\varepsilon_0}} \cos^2(\beta z)\cos^2(\omega t) =$$

$$4\varepsilon_0 E^2\left[\sin^2(\beta z)\sin^2(\omega t) + \cos^2(\beta z)\cos^2(\omega t)\right]$$

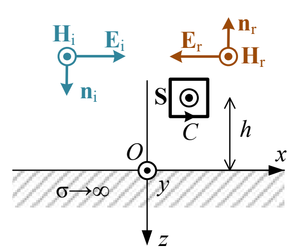
(г) Одређивање комплексног Поинтинговог вектора

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{E}}_1 \times \underline{\mathbf{H}}_1{}^* = -\mathrm{j}4\frac{E^2}{Z_0}\sin(\beta z)\cos(\beta z)\,\mathbf{i}_z \quad \text{(чисто имагинаран вектор)}$$

(д) Одређивање оптималног положаја мале равне непокретне контуре како би се добила максимална индукована емс

За максималну емс потребно је да скаларни производ вектора магнетске индукције и вектора нормале на површ контуре буде максималан,

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \left|-\mathrm{j}\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_1 \cdot \mathbf{S}\right| = \omega\mu_0 S \frac{2E}{Z_0}\left|\overbrace{\cos(-\beta h)}^{\text{оптимално } \pm 1} \cdot \overbrace{\cos\alpha}^{\text{из скаларног производа, оптимално } \pm 1}\right|$$



Очигледно да контуру треба оријентисати нормално на резултантни вектор магнетског поља. Висина треба да одговара трбуху функције стојећег таласа за ефективну вредност магнетског поља. Пошто је та функција косинусног облика, она ће имати максимум по модулу када је аргумент косинуса

$$\beta h = n\pi \quad \Rightarrow \quad h_n = \frac{n\pi}{\beta} = n\frac{\lambda}{2}.$$

Максимална емс је стога дата са

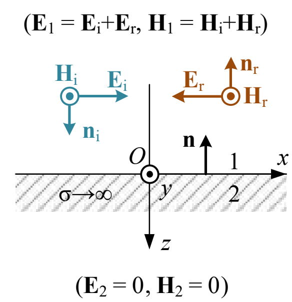
$$\left(\varepsilon_{\text{ind}}\right)_{\max} = \omega\mu_0 S\frac{2E}{Z_0}.$$

Домаћи:
Урадити друге тачке из збирке:
- Одредити Поинтингов вектор у временском домену

- Проверити Поитингову теорему за домен у облику правог цилиндра
- Одредити средње вредности густине ЕМ енергије изнад равни
- Одредити тренутне вредности емс која се индукује у малој, равној контури, површине S, која се креће брзином v у правцу и смеру простирања рефлектованог таласа
- Одредити површинске густине средње снаге Џулових губитака

Задатак 330. - модификација

Нека је текст задатка исти као за 330. само што није у питању линијски, већ *десно кружно поларизован* талас. Слике (и већина објашњења) из 330. задатка такође могу да послуже у овом случају.



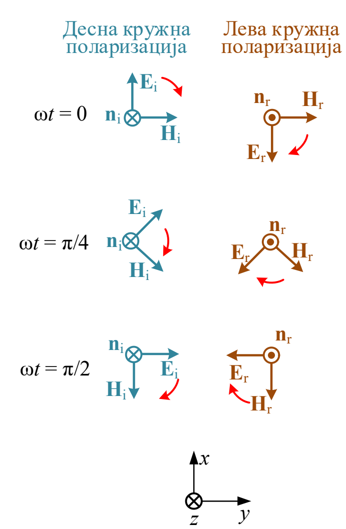
(а) Одређивање резултантног ЕМ поља изнад равни

С обзиром да врхови вектора електричног и магнетског поља стално круже, можемо замислити да су на слици приказане њихове тренутне оријентације у неком тренутку t_0.

Десна кружна поларизација подразумева да врх вектора електричног (или магнетског) поља кружи по правилу десне завојнице у односу на правац и смер простирања таласа. Како се инцидентни талас простире дуж осе, то значи да би за десну кружну поларизацију y-компонента морала да касни за $\pi/2$ у односу на x-компоненту. За реферните смерове са слике, можемо написати

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} = E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\frac{\mathbf{i}_x - \mathrm{j}\mathbf{i}_y}{\sqrt{2}} = E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\,\underline{\mathbf{i}}_\mathrm{p}, \qquad \underline{\mathbf{i}}_\mathrm{p} = \frac{\mathbf{i}_x - \mathrm{j}\mathbf{i}_y}{\sqrt{2}}, \quad \left|\underline{\mathbf{i}}_\mathrm{p}\right| = 1$$

$$\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i} = \frac{1}{Z_0}\mathbf{n}_\mathrm{i}\times\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} = \frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\cdot\frac{\mathbf{i}_y + \mathrm{j}\mathbf{i}_x}{\sqrt{2}} = \mathrm{j}\frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\cdot\overbrace{\left(\frac{\mathbf{i}_x - \mathrm{j}\mathbf{i}_y}{\sqrt{2}}\right)}^{\underline{\mathbf{i}}_\mathrm{p}} = \mathrm{j}\frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\,\underline{\mathbf{i}}_\mathrm{p},$$



Приметимо да се код магнетског поља у случају кружне поларизације јавља једно додатно j у односу на израз у случају линеарне поларизације. То се објашњава чињеницом да је вектор магнетског поља просторно померен за $\pi/2$ у односу на вектор електричног поља, а у случају кружне поларизације, то одговара истовремено и фазном померају за $\pi/2$. Конкретно, вектор магнетског поља у овом случају *предњачи* за $\pi/2$.

Из граничних услова имамо

$$\left(\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} + \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}\right)_\mathrm{tan} = 0,$$

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}\big|_{z=0} = -\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}\big|_{z=0},$$

за дате референтне смерове. Следи да је

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}} = E\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}(-\underline{\mathbf{i}}_{\mathrm{p}}),$$

$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{Z_0}\mathbf{n}_{\mathrm{r}} \times \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}} = \frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}\,\frac{\mathbf{i}_y + \mathrm{j}\mathbf{i}_x}{\sqrt{2}} = \mathrm{j}\frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}\,\underline{\mathbf{i}}_{\mathrm{p}}.$$

Изражено у апсолутним координатама, поље рефлектованог таласа задржава исту кружну поларизацију. Међутим, пошто се он креће у супротном смеру од инцидентног, он је *лево* кружно поларизован.

Ово је важно код пријема радио сигнала кружне поларизације. У случају доминантне једноструке рефлексије, антена која је пројектована за десну кружну поларизацију неће моћи да прими рефлектован талас због неприлагођености поларизација (енг. *polarization mismatch*).

Укупно поље кружно поларизованог таласа изнад равни је сличног облика као код линеарно поларизованог таласа,

$$\underline{\mathbf{E}}_1 = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} + \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}} = E\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}\right)\underline{\mathbf{i}}_{\mathrm{p}} = -\mathrm{j}2E\sin(\beta z)\,\underline{\mathbf{i}}_{\mathrm{p}},$$

$$\underline{\mathbf{H}}_1 = \underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{i}} + \underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{r}} = \frac{E}{Z_0}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}\right)\underline{\mathbf{i}}_{\mathrm{p}} = \mathrm{j}2\frac{E}{Z_0}\cos(\beta z)\,\underline{\mathbf{i}}_{\mathrm{p}}.$$

б) Одређивање расподеле индукованог наелектрисања и струја на равни

$$\underline{\rho}_{\mathrm{s}} = \mathbf{n}\cdot(\underline{\mathbf{D}}_1 - \underline{\mathbf{D}}_2)\big|_{z=0} = (-\mathbf{i}_z)\cdot\varepsilon_0\underline{\mathbf{E}}_1\big|_{z=0} = 0,$$

$$\underline{\mathbf{J}}_{\mathrm{s}} = \mathbf{n}\times(\underline{\mathbf{H}}_1 - \underline{\mathbf{H}}_2)\big|_{z=0} = (-\mathbf{i}_z)\times\underline{\mathbf{H}}_1\big|_{z=0} = 2\frac{E}{Z_0}\underline{\mathbf{i}}_{\mathrm{p}}.$$

Приметимо да је и површинска струја кружно поларизована, баш као и електрично поље.

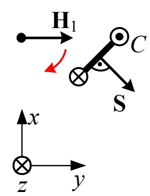
(в) Одређивање комплексног Поинтинговог вектора

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{E}}_1 \times \underline{\mathbf{H}}_1^* = -4\frac{E^2}{Z_0}\sin(\beta z)\cos(\beta z)\left(\underline{\mathbf{i}}_{\mathrm{p}} \times \underline{\mathbf{i}}_{\mathrm{p}}^*\right) = -\mathrm{j}4\frac{E^2}{Z_0}\sin(\beta z)\cos(\beta z)\,\mathbf{i}_z$$

(чисто имагинаран вектор)

(г) Одређивање оптималног положаја мале равне непокретне контуре како би се добила максимална индукована емс

Од интереса нам је резултантни вектор магнетског поља, који непрестано кружи. Пошто је потребно оптимално поставити непокретну контуру, морамо се одлучити за фиксан положај који омогућава максималну емс. Свакако да контура мора стајати вертикално, тј. да раван контуре мора бити паралелна z-оси, односно ортогонална xOy-равни. С обзиром да је у питању кружна поларизација (а не елиптична, где су неки правци фаворизовани због неједнакости дужина полуоса) контуру можемо поставити под произвољним хоризонталним углом (слика десно, поглед одозго). Следи да је



$$\varepsilon_{\mathrm{ind}} = \left|-\mathrm{j}\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_1 \cdot \mathbf{S}\right| = \omega\mu_0 S \frac{2E}{Z_0}\left|\cos(-\beta h)\right| \cdot \left|\underline{\mathbf{i}}_{\mathrm{p}} \cdot \mathbf{n}_S\right|,$$

где је $\mathbf{n}_S = \dfrac{a\mathbf{i}_x + b\mathbf{i}_y}{\sqrt{a^2+b^2}}$ нормала на површ (реалан јединични вектор).

На исти начин као и код линеарне поларизације, оптималне висине рачунамо као

$$\beta h = n\pi \quad \Rightarrow \quad h_n = \frac{n\pi}{\beta} = n\frac{\lambda}{2},$$

а рачунањем скаларног производа $\left|\underline{\mathbf{i}}_{\mathrm{p}} \cdot \mathbf{n}_S\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ добијамо

$$\left(\varepsilon_{\mathrm{ind}}\right)_{\max} = \omega\mu_0 S \frac{\sqrt{2}E}{Z_0},$$

што је $\sqrt{2}$ пута мање него у случају линеарне поларизације.

Ово одговара 2 пута мањој снази односно смањењу од 3dB.

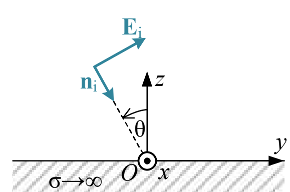
Домаћи:

Урадити и друге тачке из 330. задатка за случај десно кружно поларизованог инцидентног таласа:

- Одређивање средње вредности густине ЕМ енергије изнад равни
- Поитингове теореме за домен у облику правог цилиндра

Задатак 336.

Задатак илуструје косу инциденцију равног, униформног, простопериодичног, паралелно поларизованог ТЕМ таласа на савршено проводну раван. Паралелна поларизација се овде односи на чињеницу да је вектор јачине електричног поља паралелан инцидентој равни – равни цртежа.



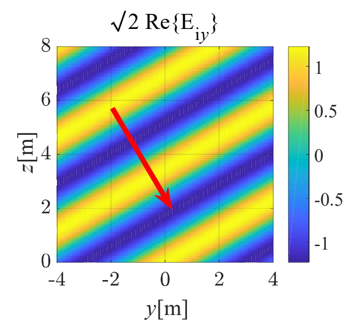
РЕШЕЊЕ:

(а) Одређивање резултантног ЕМ поља изнад равни

Усвојићемо координатни систем и референтне смерове као на слици. На основу слике, можемо изразити комплексни вектор електричног поља

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_{\mathrm{i}}},$$

где је $\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z$ и $\mathbf{n}_{\mathrm{i}} = \sin\theta\,\mathbf{i}_y - \cos\theta\,\mathbf{i}_z$. Према тексту задатка је ефективна вредност вектора јачине електричног поља E, а почетну фазу (за референтну тачку – координатни почетак) бирамо произвољно. Следи да је $\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}0} = \underline{E}(\cos\theta\,\mathbf{i}_y + \sin\theta\,\mathbf{i}_z)$. Коначно,

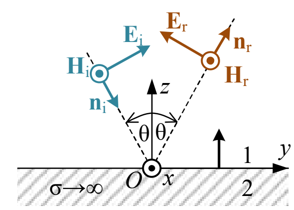


$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} = \underline{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(y\sin\theta - z\cos\theta)}(\cos\theta\,\mathbf{i}_y + \sin\theta\,\mathbf{i}_z)$$

$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{i}} = \frac{\underline{E}}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(y\sin\theta - z\cos\theta)}\,\mathbf{i}_x$$

На слици десно приказана је y-компонента електричног поља у временском домену, у тренутку $t = 0$. Угао инциденције је $\theta = \pi/6$.

Размотримо сада рефлектован талас. С обзиром на угао инциденције, рефлектујући зрак мора бити под истим углом. Електрично поље ће бити нормално на тај рефлектујући зрак. Поставимо референтни смер за рефлектовано електрично поље као на слици десно.

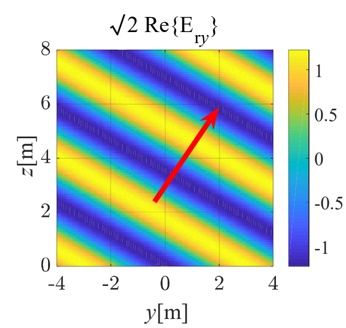


$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}} = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_{\mathrm{r}}}$$

где је $\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}0} = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}}(0,0,0)$ и $\mathbf{n}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\,\mathbf{i}_y + \cos\theta\,\mathbf{i}_z$. Даље, можемо написати

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}0} = \underline{E}_{\mathrm{r}0}(-\cos\theta\,\mathbf{i}_y + \sin\theta\,\mathbf{i}_z),$$

за референтни смер са слике (могли бисмо одабрати и супротан референтни смер за $\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}}$, али се испоставља да је овај погоднији).



На основу граничних услова,

$$(\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} + \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}})_{\tan} = 0\,,$$

$$\underline{E}_{\mathrm{i}y}\Big|_{z=0} + \underline{E}_{\mathrm{r}y}\Big|_{z=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{E}_{\mathrm{r}0} = \underline{E}\,.$$

Изрази за векторе рефлектованог електричног и магнетског поља гласе,

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}} = \underline{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(y\sin\theta + z\cos\theta)}(-\cos\theta\,\mathbf{i}_y + \sin\theta\,\mathbf{i}_z)\,,$$

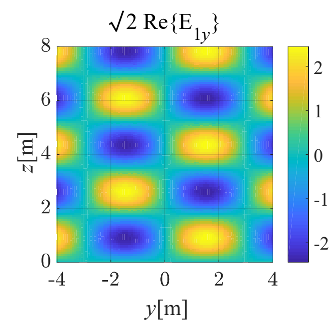
$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{r}} = \frac{\underline{E}}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(y\sin\theta + z\cos\theta)}\,\mathbf{i}_x\,.$$

Резултантно поље изнад равни је стога

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_1 = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}} + \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}} = \underline{E}&\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(y\sin\theta - z\cos\theta)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(y\sin\theta + z\cos\theta)}\right]\cos\theta\,\mathbf{i}_y + \\ \underline{E}&\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(y\sin\theta - z\cos\theta)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(y\sin\theta + z\cos\theta)}\right]\sin\theta\,\mathbf{i}_z\end{aligned},$$

$$\underline{\mathbf{E}}_1 = 2E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta y\sin\theta}\left[\mathrm{j}\sin(\beta z\cos\theta)\cos\theta\,\mathbf{i}_y + \cos(\beta z\cos\theta)\sin\theta\,\mathbf{i}_z\right]$$

$$\underline{\mathbf{H}}_1 = \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i} + \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{r} = \frac{2E}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta y\sin\theta}\cos(\beta z\cos\theta)\,\mathbf{i}_x$$



Ово није раван талас, већ суперпозиција два равна таласа. Овакав, композитни талас нема исте особине као раван талас. Изрази за векторе поља су производ просторних функција стојећег (косинус/синус) и прогресивног таласа (експоненцијална функција имагинарног аргумента).

(б) Одређивање комплексног Поинтинговог вектора

Поинтингов вектор рачунамо као у случају било ког ЕМ поља,

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{E}}_1 \times \underline{\mathbf{H}}_1^* = 4\frac{E^2}{Z_0}\left[\overbrace{\cos^2(\beta z\cos\theta)\sin\theta\,\mathbf{i}_y}^{\text{реални део у правцу } y\text{-осе}} - \right.$$
$$\left. - \mathrm{j}\overbrace{\sin(\beta z\cos\theta)\cos(\beta z\cos\theta)\cos\theta\,\mathbf{i}_z}^{\text{имагинарни део у правцу } z\text{-осе}}\right].$$

За разлику од нормалне инциденције (задатак 330.), Поинтингов вектор у овом случају има и реални и имагинарни део. То значи да један део енергије се простире (особина прогресивног таласа), док се други размењује са околином (особина стојећег таласа).

(в) Одређивање расподеле индукованог наелектрисања и струја на равни

Применом граничних услова,

$$\underline{\rho}_\mathrm{s} = \mathbf{n}\cdot(\underline{\mathbf{D}}_1 - \underline{\mathbf{D}}_2)\big|_{z=0} = \mathbf{i}_z\cdot\varepsilon_0\underline{\mathbf{E}}_1\big|_{z=0} = 2E_0\sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta\sin\theta},$$

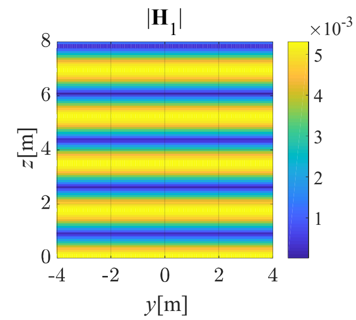
$$\underline{\mathbf{J}}_\mathrm{s} = \mathbf{n}\times(\underline{\mathbf{H}}_1 - \underline{\mathbf{H}}_2)\big|_{z=0} = \mathbf{i}_z\times\underline{\mathbf{H}}_1\big|_{z=0} = 2\frac{E}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta\sin\theta}.$$

Видимо да се на раздвојној површи у случају косе инциденције јављају и наелектрисања и струје.

(г) Одређивање оптималног положаја мале равне непокретне контуре како би се добила максимална индукована емс

Следећи кораке као за нормалну инциденцију, за вектор магнетског поља добија се израз истог облика.

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \left| -\text{j}\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_1 \cdot \mathbf{S} \right| = \omega\mu_0 S \frac{2E}{Z_0} \left|\cos(\beta h \cos\theta)\right| \cdot \left| \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{n}_S \right|, \quad \mathbf{n}_S = \pm \mathbf{i}_x .$$



Аргумент под првим косинусом, βh, је скалиран косинусом угла θ, па имамо

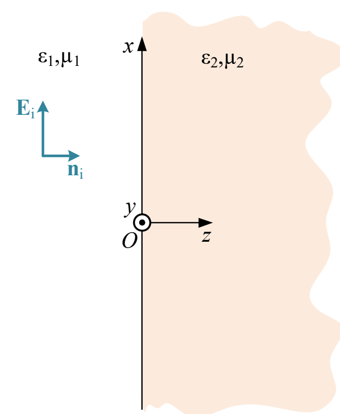
$$\beta h \cos\theta = n\pi \quad \Rightarrow \quad h_n = \frac{n\pi}{\beta\cos\theta} = n\frac{\lambda}{2\cos\theta}$$

Максимална ефективна вредност индуковане емс је

$$\left(\varepsilon_{\text{ind}}\right)_{\max} = \omega\mu_0 S \frac{2E}{Z_0} .$$

Задатак 339.

Задатак илуструје случај равног, униформног ТЕМ таласа, који наилази из једне средине у другу, управно на раздвојну површ.



(а) Одређивање резултантног ЕМ поља у обе средине

У случају савршеног немагнетског диелектрика, један део енергије инцидентног таласа ће се рефлектовати назад у средину 1 услед *контраста/дисконтинуитета* средине, а други део ће се трансмитовати у средину 2. У складу са тим постављамо систем једначина за три компоненте поља – инцдентни, рефлектовани и трансмитовани талас, усвајајући референтне смерове и координатни систем.

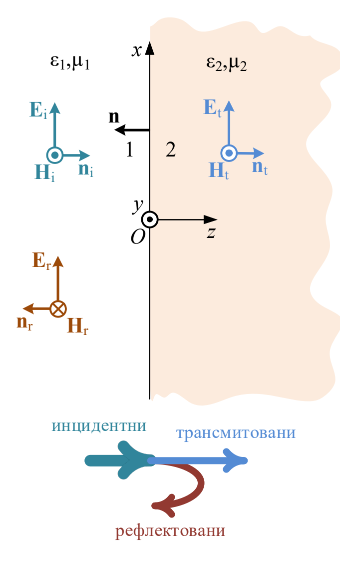
$$\underline{\mathbf{E}}_\text{i} = E\text{e}^{-\text{j}\beta_1 z}\mathbf{i}_x , \qquad \underline{\mathbf{E}}_\text{t} = \underline{E}_{\text{t}0}\text{e}^{-\text{j}\beta_2 z}\mathbf{i}_x$$

$$\underline{\mathbf{H}}_\text{i} = \frac{E}{Z_1}\text{e}^{-\text{j}\beta z}\mathbf{i}_y , \qquad \underline{\mathbf{H}}_\text{t} = \frac{\underline{E}_{\text{t}0}}{Z_2}\text{e}^{-\text{j}\beta_2 z}\mathbf{i}_y$$

$$\underline{\mathbf{E}}_\text{r} = \underline{E}_{\text{r}0}\text{e}^{\text{j}\beta_1 z}\mathbf{i}_x ,$$

$$\underline{\mathbf{H}}_\text{r} = \frac{\underline{E}_{\text{r}0}}{Z_1}\text{e}^{\text{j}\beta_1 z}(-\mathbf{i}_y) ,$$

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} , \; Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} , \; \beta_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2} , \; Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$$



Сада имамо две нове непознате, а то су комплексни представници рефлектованог и трансмитованог електричног поља на раздвојној површи. Постављањем граничних услова, добијамо линеарни систем 2×2,

$$\mathbf{n}\times\left(\underline{\mathbf{E}}_1-\underline{\mathbf{E}}_2\right)=0\,,\qquad \mathbf{n}\times\left(\underline{\mathbf{H}}_1-\underline{\mathbf{H}}_2\right)=\underline{\mathbf{J}}_\mathrm{s}=0\,,$$

$$\Rightarrow\left(\underline{\mathbf{E}}_1\right)_\mathrm{tan}=\left(\underline{\mathbf{E}}_2\right)_\mathrm{tan}\neq 0\,,\qquad \Rightarrow\left(\underline{\mathbf{H}}_1\right)_\mathrm{tan}=\left(\underline{\mathbf{H}}_2\right)_\mathrm{tan}\,,$$

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}\Big|_{z=0}+\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}\Big|_{z=0}=\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{t}\Big|_{z=0}\,,\qquad \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i}\Big|_{z=0}+\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{r}\Big|_{z=0}=\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{t}\Big|_{z=0}\,,$$

$$\boxed{E+\underline{E}_\mathrm{r0}=\underline{E}_\mathrm{t0}},$$

$$\boxed{\frac{E}{Z_1}-\frac{\underline{E}_\mathrm{r0}}{Z_1}=\frac{\underline{E}_\mathrm{t0}}{Z_2}},$$

чијим решавањем добијамо

$$\underline{E}_\mathrm{r0}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}E=R\cdot E\,,\qquad \left(R=\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}=R_{12}=-R_{21}\leq\geq 0,\ |R|\leq 1\right)$$

$$\underline{E}_\mathrm{t0}=\frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}E=T\cdot E\,,\qquad \left(T=\frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}=T_{12}=\frac{Z_1}{Z_2}T_{21}>0\right)$$

R и T називају се коефицијентима рефлексије и трансмисије, респективно. Једнакости у заградама важе, ако имамо средине без губитака, тј. ако $R,T\in\mathbb{R}$ (У општем случају, $\underline{\mu},\underline{\varepsilon}\in\mathbb{C}$, па онда и $\underline{R},\underline{T}\in\mathbb{C}$).

Рефлектовано и трансмитовано поље изражавамо експлицитно на следећи начин

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}E\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}\mathbf{i}_x\,,\qquad \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{t}=\frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}\mathbf{i}_x$$

$$\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{r}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}\frac{E}{Z_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}\,(-\mathbf{i}_y)\,,\qquad \underline{\mathbf{H}}_\mathrm{t}=\frac{2}{Z_1+Z_2}E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}\mathbf{i}_y\,.$$

Сабирањем инцидентног и рефлектованог поља, добијамо резултантно поље за прву средину.

$$\underline{\mathbf{E}}_1=\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}+\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}=E\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}+R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}\right)\mathbf{i}_x\,.$$

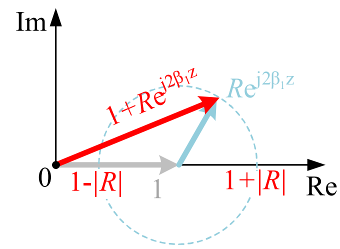
$$\underline{\mathbf{H}}_1=\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{i}+\underline{\mathbf{H}}_\mathrm{r}=\frac{E}{Z_1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}-R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}\right)\mathbf{i}_x\,.$$

(б) Одређивање коефицијента стојећег таласа (енг. *standing wave ratio*)

Коефицијент стојећег таласа је однос максимума и минимума посматране величине,

$$KST=\frac{\left|\underline{\mathbf{E}}_1(z)\right|_\mathrm{max}}{\left|\underline{\mathbf{E}}_1(z)\right|_\mathrm{min}}=\frac{\left|\underline{\mathbf{H}}_1(z)\right|_\mathrm{max}}{\left|\underline{\mathbf{H}}_1(z)\right|_\mathrm{min}}$$

Један од начина одређивања минимума и максимума јесте графичка анализа у комплексној равни (слика), па стога изражавамо укупно поље на следећи начин



$$\underline{\mathbf{E}}_1 = E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\left(1 + R\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z}\right)\mathbf{i}_x, \qquad \left|\underline{\mathbf{E}}_1\right| = E\left|1 + R\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z}\right|,$$

$$\underline{\mathbf{H}}_1 = \frac{E}{Z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\left(1 - R\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z}\right)\mathbf{i}_y, \qquad \left|\underline{\mathbf{H}}_1\right| = \frac{E}{Z_1}\left|1 - R\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z}\right|.$$

(За домаћи написати модуле вектора поља експлицитно)

Коефицијент стојећег таласа је стога

$$KST = \frac{1+|R|}{1-|R|}, \quad 1 \le KST < \infty .$$

(Колико износи KST у случају рефлексије од савршено проводне равни?)

(в) Одређивање оптималног положаја мале равне непокретне контуре како би се добила максимална индукована емс

Оптимално је поставити контуру ортогнално на y-осу. Желимо да одредимо тачке у простору средине 1 у којима се налазе максимуми магнетског поља,

$$1 - R\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z} = 1 + |R|$$
$$|R| = -R\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z} .$$

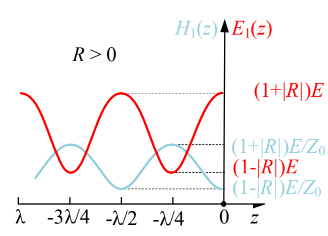
Пошто је $R \lesseqgtr 0$, дискутујемо по предзнаку,

Ако је $R > 0$, $\quad 2\beta_1 z = (2n-1)\pi \quad z_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2\beta_1} = \dfrac{(2n-1)\lambda_1}{4}$

Ако је $R < 0$, $\quad 2\beta_1 z = 2n\pi \quad z_n = \dfrac{2n\pi}{2\beta_1} = \dfrac{n\lambda_1}{2}$, $n = 0,-1,-2,-3,\ldots$

(За домаћи одредити максимуме и минимуме електричног поља)

Максимална емс износи $(\varepsilon_{\mathrm{ind}})_{\max} = \left|-\mathrm{j}\omega\mu_0 \underline{\mathbf{H}}_1 \cdot \mathbf{S}\right|_{\max} = \omega\mu_0 S \dfrac{E}{Z_1}\left(1+|R|\right)$



(на слици је дат пример графика ефективних вредности електричног и магнетског поља за $R > 0$)

Домаћи:
- Урадити задатке 334. и 341.

Сва питања у вези са наставним материјалом студенти могу да упуте предметном наставнику електронском поштом на nbasta@etf.rs .