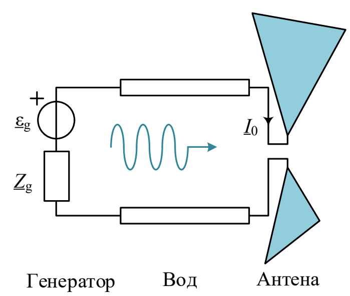
Предмет: **Електромагнетика (ОТ)**
Шифра: **13Е072ТЕМ**
Асистент: Никола Баста

НАСТАВА НА ДАЉИНУ

ВЕЖБЕ, 12. СЕДМИЦА, 4-10. МАЈ 2020.

Литература:
[1] Б. М. Нотарош, В. В. Петровић, М. М. Илић, А. Р. Ђорђевић, Б. М. Колунџија, М. Б. Драговић, „Збирка испитних питања и задатака из Електромагнетике“, Академска мисао, Београд, 2008.
[2] Испитни задаци са претходних рокова, http://em.etf.rs/rokovi.htm

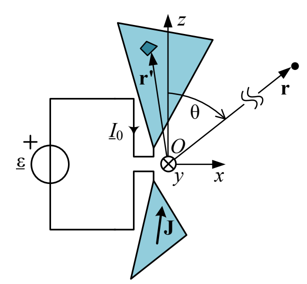
Далеко поље зрачења антене напајане струјом $\underline{I}_0$



Антена је уређај који вођени електромагнетски талас претвара у слободни талас. У том процесу се вођена енергија (у таласоводу или воду) зрачи у слободан простор. Комплексни вектори јачине електричног и магнетског поља зрачења произвољне антене дати су изразима

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{zr}}(\theta,\phi,r) = \mathrm{j}\frac{Z_0}{2\pi}\cdot \overbrace{\underline{I}_0}^{\text{струја напајања антене}} \cdot \overbrace{\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r}}^{\text{фактор сферног таласа}} \cdot \overbrace{\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi)}^{\text{функција зрачења}}},$$

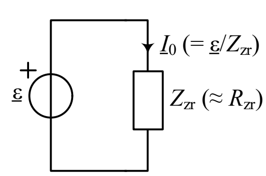
$$\boxed{\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{zr}} = \frac{1}{Z_0}\mathbf{i}_r \times \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{zr}}},$$



где је $r >> \lambda$ (поље у далеким тачкама),

$\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi) = \dfrac{\pi}{\lambda}\cdot \mathbf{i}_r \times \left(\mathbf{i}_r \times \underline{\mathbf{l}}_{\mathrm{eff}}\right)$ је карактеристична функција зрачења антене

и $\underline{\mathbf{l}}_{\mathrm{eff}} = \dfrac{1}{\underline{I}_0}\displaystyle\int_v \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta\mathbf{r}'\cdot\mathbf{i}_r}\,\mathrm{d}v$ је ефективна дужина антене за произвољну расподелу струје $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')$. У случају плочасте антене, тј. површинске расподеле струје, ефективна дужина се рачуна као,



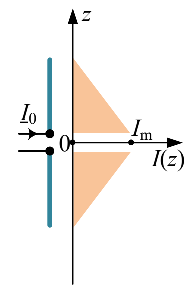
$$\underline{\mathbf{l}}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{\underline{I}_0}\int_S \underline{\mathbf{J}}_{\mathrm{s}}(\mathbf{r}')\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta\mathbf{r}'\cdot\mathbf{i}_r}\,\mathrm{d}S,$$

а у случају линеарне (танке жичане) антене, тј. линеарне расподеле струје, ефективна дужина износи

$$\underline{\mathbf{l}}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{\underline{I}_0}\int_C \underline{I}(l)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta\mathbf{r}'\cdot\mathbf{i}_r}\,\mathrm{d}\mathbf{l}\,.$$

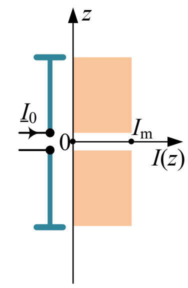
Испитни задатак

Одредити карактеристичну функцију зрачења Херцовог дипола дужине $l \ll \lambda$.

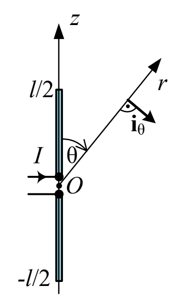


РЕШЕЊЕ:

Херцов дипол представља праву танку жичану антену, чија дужина је много мања од таласне дужине у датој средини. Дуж осе Херцовог дипола струја је константна. Овакав дипол је математички модел бесконачно малог зрачећег елемента и основ је за анализу сложенијих антена. Проста бесконачно танка и кратка жичана антена чини дипол који није Херцов по природи. Због бесконачно малог радијуса жице, на њеним крајевима није могуће гомилање вишка наелектрисања, па струја на крајевима тежи нули (последица једначине континуитета). Од тачака напајања до крајева струја опада практично линеарно до нуле. Овакву антену називамо *кратки дипол* (прва слика десно).



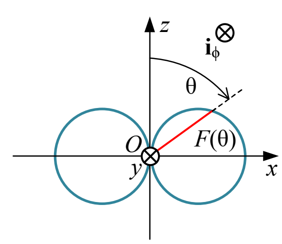
Херцов дипол се може физички моделовати као кратка антена *са оптерећењем*. То значи да је антена на крајевима оптерећена капацитивним елементима (нпр. дисковима или сферама) који имају способност гомилања вишка наелектрисања (друга слика десно).



Ефективна дужина Херцовог дипола је

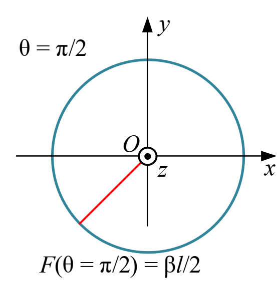
$$\underline{\mathbf{l}}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{\underline{I}_0}\int_C \underline{I}(l)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta\mathbf{r}'\cdot\mathbf{i}_r}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{1}{I}\int_{-l/2}^{l/2} I\,\mathrm{e}^{\overbrace{\mathrm{j}\beta z\cos\theta}^{\approx 0}}\,\mathrm{d}z\,\mathbf{i}_z = l\,\mathbf{i}_z\,.$$

Карактеристична функција зрачења следи



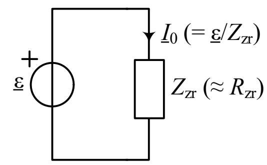
$$\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi) = \frac{\pi}{\lambda}\cdot\mathbf{i}_r\times\left(\mathbf{i}_r\times\underline{\mathbf{l}}_{\mathrm{eff}}\right) = \frac{\pi}{\lambda}\cdot l\sin\theta\,\mathbf{i}_\theta = \frac{\beta l}{2}\sin\theta\,\mathbf{i}_\theta\,.$$

Карактеристична функција зрачења у општем случају зависи од две промењиве. Она описује тродимензионалну површ у сферном координатном систему, ако дуж r -осе цртамо вредност модула функције $\left|\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi)\right|$. У случају Херцовог дипола та површ је облика *крофне*. Пројекције површи су дате на сликама са десне стране. (За домаћи доказати да у пресеку са вертикалном равни, нпр. са xOz -равни, пресечну криву чине два круга са једном додирном тачком у координатном почетку)



Снага и отпорност зрачења

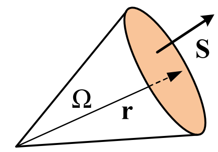
Снага зрачења је снага коју предајна антена израчи у слободан простор. Она се рачуна помоћу флукса Поинтингова вектора,



$$P_{\mathrm{zr}} = \mathrm{Re}\left\{\oint_S \mathbf{P}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\oint_S \frac{\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{zr}}\times \underline{\mathbf{H}}^*_{\mathrm{zr}}}{Z_0}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\right\} = \oint_\Omega \frac{|\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{zr}}|^2}{Z_0} r^2 \mathrm{d}\Omega$$

$$= \oiint_{\theta,\phi} \frac{Z_0}{4\pi^2} I_0^2 \cdot \frac{1}{r^2}\cdot |\underline{\mathbf{F}}|^2 r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \ , \qquad \left[\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}\mathbf{S}\cdot \mathbf{i}_r}{r^2} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\right]$$

$$\boxed{P_{\mathrm{zr}} = \frac{Z_0}{4\pi^2} I_0^2 \oiint_{\theta,\phi} |\underline{\mathbf{F}}|^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi.}.$$



Снага зрачења Херцовог дипола је

$$P_{\mathrm{zr}} = \frac{Z_0^2}{4\pi^2} I_0^2 \left(\frac{\beta l}{2}\right)^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\theta=0}^{\pi} (\sin\theta)^3\,\mathrm{d}\theta \ ,$$

$$P_{\mathrm{zr}} = \frac{Z_0}{6\pi} (\beta l)^2 I_0^2 \ .$$

Отпорност зрачења се изводи из снаге и дефинише као

$$\boxed{R_{\mathrm{zr}} = \frac{P_{\mathrm{zr}}}{I_0^2}},$$

а рачуна као

$$R_{\mathrm{zr}} = \frac{P_{\mathrm{zr}}}{I_0^2} = \frac{Z_0}{4\pi^2} \oiint_{\theta,\phi} |\underline{\mathbf{F}}|^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \,.$$

Отпорност зрачења Херцовог дипола је стога

$$R_{\mathrm{zr}} = \frac{Z_0}{6\pi}(\beta l)^2 \approx 20(\beta l)^2 \,.$$

Усмерено појачање (усмереност)

Усмерено појачање представља количник интензитета зрачења у датом правцу и његове средње вредности у смислу просторног угла.

$$g_{\mathrm{d}}(\theta,\phi) = \frac{I_{\mathrm{zr}}(\theta,\phi)}{(I_{\mathrm{zr}})_{\mathrm{sr}}} \,.$$

Интензитет зрачења се дефинише као просторно-угаона густина снаге зрачења

$$I_{\mathrm{zr}}(\theta,\phi)=\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{zr}}}{\mathrm{d}\Omega},$$

а његова средња вредност као количник укупне снаге зрачења и укупног просторног угла

$$(I_{\mathrm{zr}})_{\mathrm{sr}}=\frac{P_{\mathrm{zr}}}{4\pi}.$$

Стога се усмерено појачање може изразити на следећи начин,

$$g_{\mathrm{d}}(\theta,\phi)=\frac{I_{\mathrm{zr}}(\theta,\phi)}{(I_{\mathrm{zr}})_{\mathrm{sr}}}=\frac{\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{zr}}}{\mathrm{d}\Omega}}{\frac{P_{\mathrm{zr}}}{4\pi}}=\frac{4\pi}{P_{\mathrm{zr}}}\cdot\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{zr}}}{\mathrm{d}\Omega}\cdot\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}S}=\frac{4\pi}{P_{\mathrm{zr}}}\cdot r^2\left|\underline{\mathbf{P}}(\theta,\phi)\right|$$

$$=\frac{4\pi r^2\cdot\frac{\left|\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{zr}}\right|^2}{Z_0}}{R_{\mathrm{zr}}I_0^2}=\frac{4\pi r^2\cdot\frac{1}{Z_0}\frac{Z_0^2}{4\pi^2}I_0^2\frac{1}{r^2}\left|\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi)\right|^2}{R_{\mathrm{zr}}I_0^2},$$

$$\boxed{g_{\mathrm{d}}(\theta,\phi)=\frac{Z_0}{R_{\mathrm{zr}}}\cdot\frac{\left|\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi)\right|^2}{\pi}}.$$

Максимално усмерено појачање се зове *усмереност* или *директивност* антене.

$$\left[g_{\mathrm{d}}(\theta,\phi)\right]_{\max}=D,\quad D[\mathrm{dB}]=10\log_{10}D.$$

Усмерено појачање Херцовог дипола износи

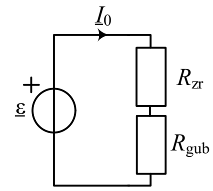
$$g_{\mathrm{d}}(\theta,\phi)=\frac{Z_0}{Z_0\frac{(\beta l)^2}{6\pi}}\cdot\frac{\left(\frac{\beta l}{2}\right)^2\sin^2\theta}{\pi}=\frac{3}{2}\sin^2\theta,$$

а његов максимум $D=1{,}5\ (\approx 1{,}76\,\mathrm{dB})$

Домаћи:
Доказати да је за произвољну антену

$$g_{\mathrm{d}}(\theta,\phi)=\frac{\left|\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi)\right|^2}{\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\theta,\phi}\left|\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi)\right|^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}.$$

Појачање по снази (добитак) и отпорност губитака



Појачање по снази (функција угла) се дефинише као количник интензитета зрачења у датом правцу и средње вредности снаге *уложене* у антену (снаге која се троши на антени).

$$g_p(\theta,\phi)=\frac{I_{zr}(\theta,\phi)}{\frac{P_a}{4\pi}}=\frac{I_{zr}(\theta,\phi)}{\frac{P_a}{4\pi}}\cdot\frac{P_{zr}}{P_{zr}}=g_d(\theta,\phi)\cdot\frac{P_{zr}}{P_a}$$

Ова снага обухвата снагу зрачења и снагу губитака на антени. У складу са тим дефинишу се укупна отпорност антене R_a и отпорност губитака R_{gub},

$$P_a=R_aI_0^2=(R_{zr}+R_{gub})I_0^2,\quad R_a=R_{zr}+R_{gub}.$$

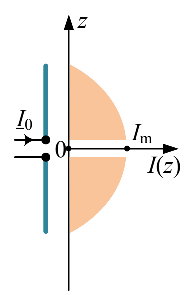
Појачање по снази можемо изразити преко усмереног појачања,

$$g_p(\theta,\phi)=g_d(\theta,\phi)\cdot\frac{R_{zr}}{R_a}=g_d(\theta,\phi)\cdot\frac{R_{zr}}{R_{zr}+R_{gub}}=g_d(\theta,\phi)\cdot\eta,$$

$$\left[g_p(\theta,\phi)\right]_{max}=G,\quad G[\mathrm{dB}]=10\log_{10}G,$$

где се η назива *ефикасност* антене.

Полуталасни дипол



Полуталасни дипол је дипол дужине половине таласне дужине у датој средини,

$$l=2h=\frac{\lambda}{2},\quad h=\frac{\lambda}{4}$$

те стога више не важи $l \ll \lambda$! Расподела струје је приближно синусна и дата је изразом

$$I(z)=I_m\sin\left[\beta\left(h-|z|\right)\right],\quad I(z=0)=I_m\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}\right]=I_m.$$

Ефективну дужину $\lambda/2$-дипола рачунамо као

$$\underline{\mathbf{l}}_{eff}=\frac{1}{I_m}\int_{-h}^{h}I_m\sin\left[\beta\left(h-|z|\right)\right]e^{j\beta z\cos\theta}\,dz\,\mathbf{i}_z,$$

где експоненцијални израз представљамо помоћу косинуса и синуса (парне и непарне функције)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z\cos\theta} = \cos(\beta z\cos\theta) + \mathrm{j}\sin(\beta z\cos\theta).$$

Следи,

$$\underline{\mathbf{l}}_{\mathrm{eff}} = 2\int_0^h \sin[\beta(h-|z|)]\cos(\beta z\cos\theta)\mathrm{d}z\,\mathbf{i}_z$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^h \left\{\sin[\overbrace{\beta(h-z)+\beta z\cos\theta}^{u}] + \sin[\overbrace{\beta(h-z)-\beta z\cos\theta}^{v}]\right\}\mathrm{d}z\,\mathbf{i}_z.$$

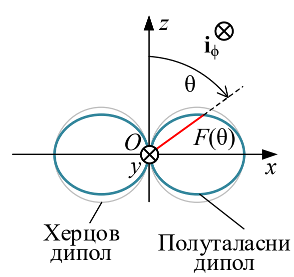
Увођењем смена,

$$\underline{\mathbf{l}}_{\mathrm{eff}} = \int_{\beta h}^{\beta h\cos\theta} \frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{\beta(-1+\cos\theta)}\mathbf{i}_z + \int_{\beta h}^{-\beta h\cos\theta} \frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{\beta(-1-\cos\theta)}\mathbf{i}_z$$
$$= \frac{-1-\cos\theta-1+\cos\theta}{\beta(1-\cos^2\theta)}\cdot(-\cos(\beta h\cos\theta))\mathbf{i}_z = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\beta\sin^2\theta}\mathbf{i}_z.$$

Коначно, карактеристична функција зрачења је

$$\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi) = \frac{\pi}{\lambda}\cdot\mathbf{i}_r\times(\mathbf{i}_r\times\underline{\mathbf{l}}_{\mathrm{eff}}) = \frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\beta\sin^2\theta}\cdot\sin\theta\,\mathbf{i}_\theta,$$

$$\boxed{\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathbf{i}_\theta}, \qquad |\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi)|_{\max} = 1.$$



Она је нешто *пљоснатијег* облика у пресеку који садржи дипол. На слици је приказано поређење скалираних (!) модула карактеристичних функција зрачења Херцоцвог и полуталасног дипола.

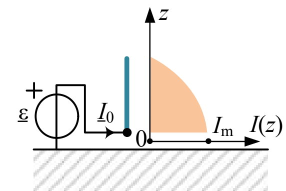
Отпорност зрачења се рачуна нумерички и износи

$$\boxed{R_{\mathrm{zr}} = \frac{P_{\mathrm{zr}}}{I_0^2} = \frac{Z_0}{4\pi^2}\oiint_{\theta,\phi}|\underline{\mathbf{F}}|^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \approx 73\,\Omega},$$

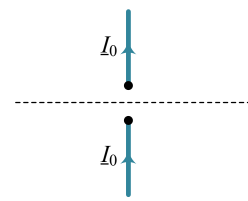
а усмереност

$$D = [g_{\mathrm{d}}(\theta,\phi)]_{\max} = \left[\frac{Z_0}{R_{\mathrm{zr}}}\cdot\frac{|\underline{\mathbf{F}}(\theta,\phi)|^2}{\pi}\right]_{\max} = 1{,}64 \quad (\approx 2{,}15\,\mathrm{dB}).$$

Монопол антене

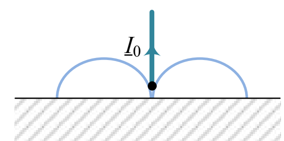


Монопол антене, ако су постављене вертикално изнад савршено проводне равни, имају исту природу као и дипол антене у слободном простору. Посредством теореме ликова, добија се еквивалентна расподела струје, а тиме и карактеристична функција зрачења, као код дипола.



Разлика је, међутим, видљива код осталих параметара. Снага и отпорност зрачења се рачунају на основу укупне израчене снаге, која одлази само у горњу половину простора. У савршено проводну раван се не зрачи никакава снага, тј.

$$\underline{\mathbf{F}}_{\text{monopol}}(\theta,\phi)=\begin{cases}\underline{\mathbf{F}}_{\text{dipol}}(\theta,\phi), & 0\le\theta\le\pi/2\\ 0, & \pi/2\le\theta\le\pi\end{cases}.$$



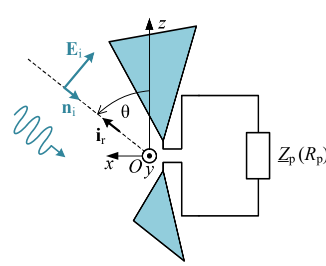
Стога је граница интеграције по углу θ у изразу за отпорност зрачења $0\le\theta\le\pi/2$.

$$R_{\text{zr,monopol}}=\frac{Z_0}{4\pi^2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left|\underline{\mathbf{F}}\right|^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,.$$

Следи

$$\boxed{R_{\text{zr,monopol}}=\frac{R_{\text{zr,dipol}}}{2}},$$
$$\boxed{g_{\text{d,monopol}}(\theta,\phi)=2g_{\text{d,dipol}}(\theta,\phi)},$$
$$D_{\text{monopol}}=2D_{\text{dipol}}\,.$$

Пријемне антене

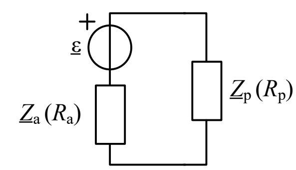


Када антена није напајана локалним генератором и на њу наиђе раван ТЕМ талас, на њеним прикључцима се индукује емс, која се рачуна као

$$\boxed{\underline{\varepsilon}=\frac{\lambda}{\pi}\cdot\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}\cdot\underline{\mathbf{F}}_\mathrm{p}}.$$

Пријемну антену и потрошач моделујемо импедансама као на слици. Максималан пренос снаге је омогућен када је

$\underline{Z}_\mathrm{p}=\underline{Z}_\mathrm{a}^*$, (прилагођење) односно, када је



$R_\mathrm{p} = R_\mathrm{a} \quad (R_\mathrm{zr})$. (у задацима ћемо моделовати антену и потрошач чисто резистивним елементима.

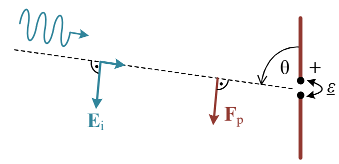
Снага прилагођеног пријемника се рачуна као

$$P_\mathrm{pr} = \frac{|\underline{\varepsilon}|^2}{4R_\mathrm{p}} .$$

Ефективна површина пријемне антене

Емс која се индукује на прикључцима пријемне антене износи

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} \cdot \underline{\mathbf{F}}_\mathrm{p} .$$



Ефективна површина се дефинише као количник максималне снаге коју прима прилагођени (!) пријемник и површинске густине снаге инцидентног таласа (модуо Поинтинговог вектора) за задати правац,

$$S_\mathrm{eff}(\theta,\phi) = \frac{(P_\mathrm{pr})_\mathrm{max}}{|\underline{\mathbf{P}}_\mathrm{i}|} . \qquad \text{(ефективна површина је функција угла!)}$$

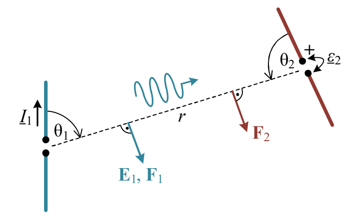
Максимална снага прилагођеног пријемника се постиже када се поларизације вектора електричног поља инцидентног таласа и карактеристичне функције зрачења пријемне антене поклапају на датом правцу,

$$S_\mathrm{eff}(\theta,\phi) = \frac{(P_\mathrm{pr})_\mathrm{max}}{|\underline{\mathbf{P}}_\mathrm{i}|} = \frac{\dfrac{1}{4R_\mathrm{a}}\left(\dfrac{\lambda}{\pi}\right)^2 \overbrace{|\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i} \cdot \underline{\mathbf{F}}_\mathrm{p}|^2_\mathrm{max}}^{|\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}|^2 |\underline{\mathbf{F}}_\mathrm{p}|^2}}{\dfrac{|\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}|^2}{Z_0}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \frac{Z_0}{R_\mathrm{a}} \cdot \frac{|\underline{\mathbf{F}}_\mathrm{p}|^2}{\pi}$$

$$\boxed{S_\mathrm{eff}(\theta,\phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot g_\mathrm{p}(\theta,\phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot g_\mathrm{d}(\theta,\phi) \cdot \eta}$$

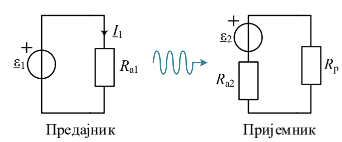
Фрисова формула – пример преноса снаге између две антене

Фрисову формулу користимо за прорачун преноса снаге од предајне антене ка прилагођеном пријемнику пријемне антене. Уместо i и p, користићемо индексе 1 и 2. Нека је антена 1 предајна, а антена 2 пријемна. Ако се предајна антена напаја снагом P_0, онда је ефективна вредност њене струје напајања



$$I_1 = \sqrt{\frac{P_0}{R_{\mathrm{a}1}}} \,.$$

Поинтингов вектор таласа који шаље предајна антена рачунамо као



$$\left|\underline{\mathbf{P}}_1\right| = \left|\underline{\mathbf{E}}_1 \times \underline{\mathbf{H}}_1^*\right| = \frac{\left|\underline{\mathbf{E}}_1\right|^2}{Z_0} = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{Z_0^2}{4\pi^2} \overbrace{I_1^2}^{P_0 / R_{\mathrm{a}1}} \frac{1}{r^2} \left|\underline{\mathbf{F}}_1\right|^2 = \frac{Z_0}{R_{\mathrm{a}1}} \frac{\left|\underline{\mathbf{F}}_1\right|^2}{\pi} \cdot \frac{P_0}{4\pi r^2} \,,$$

$$\left|\underline{\mathbf{P}}_1\right| = \frac{P_0}{4\pi r^2} g_{\mathrm{p}1}(\theta,\phi) \,.$$

Снага прилагођеног пријемника на антени 2 је

$$P_{\mathrm{pr}} = \frac{\varepsilon_2^2}{4R_{\mathrm{a}2}} = \frac{\frac{\lambda^2}{\pi^2} Z_0^2 \left|\underline{\mathbf{E}}_1 \cdot \underline{\mathbf{F}}_2\right|^2}{4R_{\mathrm{a}2}} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \cdot \frac{\frac{Z_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \overbrace{I_1^2}^{P_0 / R_{\mathrm{a}1}} \left|\underline{\mathbf{F}}_1\right|^2}{4R_{\mathrm{a}2}} \left|\underline{\mathbf{F}}_2\right|^2 \,,$$

$$\boxed{P_{\mathrm{pr}} = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 g_{\mathrm{p}1}(\theta_1,\phi_1)\, g_{\mathrm{p}2}(\theta_2,\phi_2)} \,.$$

Израз за пренос снаге можемо интерпетирати као производ траснфер функција у ланцу појединачних блокова,

(појачање прве антене)×(траснфер ф-ја средине)
×(појачање друге антене) .

Алтернативни запис овог израза дозвољава и другачију интерпретацију,

(густина снаге предајне антене) × (површина пријемне антене),

$$P_{\mathrm{pr}} = \overbrace{\frac{P_0}{4\pi r^2} g_{\mathrm{p}1}(\theta_1,\phi_1)}^{\left|\underline{\mathbf{P}}_1\right|} \cdot \overbrace{\frac{\lambda^2}{4\pi} g_{\mathrm{p}2}(\theta_2,\phi_2)}^{S_{\mathrm{eff}2}(\theta,\phi)} = \left|\underline{\mathbf{P}}_1(\theta,\phi)\right| S_{\mathrm{eff}2}(\theta,\phi)$$

Сва питања у вези са наставним материјалом студенти могу да упуте предметном наставнику електронском поштом на nbasta@etf.rs .