Предмет: **Електромагнетика (ОТ)**
Шифра: **13Е072ТЕМ**
Асистент: Никола Баста

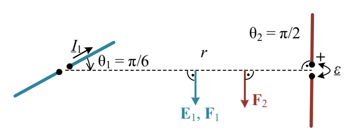
НАСТАВА НА ДАЉИНУ

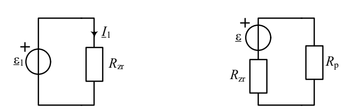
ВЕЖБЕ, 13. СЕДМИЦА, 11-17. МАЈ 2020.

Литература:

[1] Б. М. Нотарош, В. В. Петровић, М. М. Илић, А. Р. Ђорђевић, Б. М. Колунџија, М. Б. Драговић, „Збирка испитних питања и задатака из Електромагнетике“, Академска мисао, Београд, 2008.
[2] Испитни задаци са претходних рокова, http://em.etf.rs/rokovi.htm

Задатак 454.
У задатку је потребно наћи ефективну вредност емс која се индукује у пријемном диполу и снагу на прилагођеном пријемнику.





Снагу рачунамо помоћу познатог израза

$$P_{pr} = \frac{|\underline{\varepsilon}|^2}{4R_p},$$

а емс добијамо из скаларног производа

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \underline{\mathbf{E}}_1 \cdot \underline{\mathbf{F}}_2 .$$

Електрично поље зависи од функције зрачења

$$\underline{\mathbf{E}}_1(\theta, \phi, r) = \mathrm{j}\frac{Z_0}{2\pi} \cdot \underline{I}_1 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r} \underline{\mathbf{F}}_1(\theta)$$

$$= \mathrm{j}\frac{Z_0}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{P_0}{R_{zr}}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}} \mathbf{i}_\theta .$$

Са друге стране, пријемна антена „гледа“ предајну под углом за који је функција зрачења пријемне антене максимална

$$F_2(\theta = \pi/2) = 1 .$$

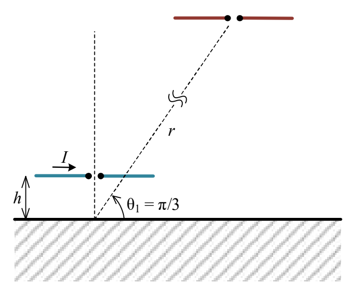
Пошто су поларизације усклађене,

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \left|\underline{\mathbf{E}}_1\right| \cdot \left|\underline{\mathbf{F}}_2\right| \approx 4{,}4\,\mathrm{mV}\,.$$

Снага на прилагођеном пријемнику је стога

$$P_{\mathrm{pr}} = \frac{\varepsilon^2}{4R_{\mathrm{zr}}} \approx 67\,\mathrm{nW}\,.$$

Задатак 452.
У задатку се илуструје зрачење антене која је у близини савршено проводне равни.

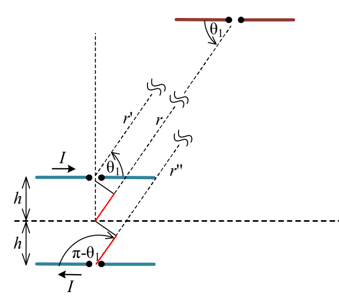


Емс која се индукује на пријему је

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \underline{\mathbf{E}}_1 \cdot \underline{\mathbf{F}}_2\,.$$

Електрично поље предајне антене је резултат суперпозиције поља оригинала и лика,

$$\underline{\mathbf{E}}_1 = \underline{\mathbf{E}}_1{}' + \underline{\mathbf{E}}_1{}'' = \frac{\mathrm{j}Z_0}{2\pi}\sqrt{\frac{P_0}{R_{\mathrm{zr}}}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r'}}{r'}\underline{F}_1(\theta_1) - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r''}}{r''}\underline{F}_1(\pi-\theta_1)\right]\mathbf{i}_{\theta_1}\,,$$



при чему је

$$\underline{F}_1(\theta_1) = \underline{F}_1(\pi-\theta_1) = F_2(\theta_1)\,.$$

Због велике удаљености пријемне антене, растојања и њихове реципрочне вредности су приближно исти $(r >> h)$,

$$\frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r''} \approx \frac{1}{r}\,.$$

Ово се **не може** тврдити за било коју функцију, чији су аргументи поменута растојања, нарочито у случају тригонометријских функција. Фазни допринос се мора посебно разматрати.

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r'} \cancel{\approx} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r''} \quad !$$

Растојања од оригинала и лика су

$$r' = r - h\sin\theta$$
$$r'' = r + h\sin\theta$$

Следи електрично поље,

$$\underline{\mathbf{E}}_1 = \frac{\mathrm{j}Z_0}{2\pi}\sqrt{\frac{P_0}{R_{zr}}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r'}}{r}\underline{F}_1(\theta_1)\left[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(r''-r')}\right]\mathbf{i}_{\theta_1}$$
$$= \frac{\mathrm{j}Z_0}{2\pi}\sqrt{\frac{P_0}{R_{zr}}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r'}}{r}\underline{F}_1(\theta_1)\left[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta\cdot 2h\sin\theta}\right]\mathbf{i}_{\theta_1}\ .$$

Индукована емс се сада може израчунати као

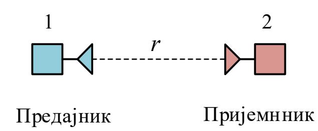
$$\underline{\varepsilon} = \frac{\lambda}{\pi}\cdot\left|\underline{\mathbf{E}}_1\right|\cdot\left|\underline{\mathbf{F}}_2(\pi/3)\right| \approx 46\,\mathrm{mV}\ ,$$

а снага прилагођеног пријемника као

$$P_{pr} = \frac{\varepsilon^2}{4R_{zr}} \approx 7{,}3\,\mu\mathrm{W}\ .$$

Домаћи:
Урадити задатке 473. и 475.

Задатак 481.
Задатак илуструје пренос снаге са предајне на пријемну антену, које нису детаљно познате. $P_0/P_{pr} = ?$



„Антене су оријентисане тако да је пренос снаге максималан."
Ово значи да су поларизације усклађене, да се антене „гледају" у правцу максималних функција зрачења и да је пријемник прилагођен.

$$D_1 = 100 \qquad\qquad S_{eff2} = 2\,\mathrm{m}^2$$
$$r = 10\,\mathrm{km}$$
$$f = 1\,\mathrm{GHz}$$

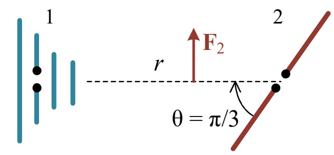
Снагу на пријему налазимо као

$$P_{pr} = \left|\underline{\mathbf{P}}_1(\theta,\phi)\right|\cdot S_{eff2}(\theta,\phi) = \frac{P_0}{4\pi r^2}D_1\cdot S_{eff\,2}$$
$$\frac{P_0}{P_{pr}} = \frac{4\pi r^2}{D_1 S_{eff2}} = \frac{4\pi\cdot 10^8}{2\cdot 10^2} = 2\pi\cdot 10^6 \approx 6{,}28\cdot 10^6\ \ (68\,\mathrm{dB})$$

Пример:

За $P_0 = 1\,\mathrm{kW}$, снага на пријему је $P_{pr} = \dfrac{1}{2\pi}\mathrm{mW}$. Слабљење реда 10^6.

Задатак 486.
Задатак илуструје трансфер снаге од предајне Јаги антене до полуталасног дипола.



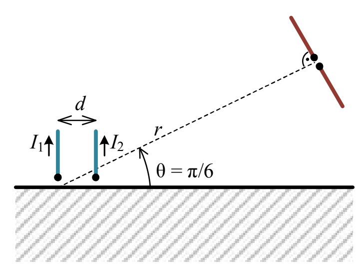
$f = 450\,\text{MHz}$
$P_0 = 100\,\text{W}$
$D_1 = 12\,\text{dB}$
$r = 10\,\text{km}$

Пријемну снагу одређујемо помоћу Фрисове формуле

$$P_{\text{pr}} = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 g_{\text{p}1}\, g_{\text{p}2} = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 D_1 \cdot g_{\text{d}2}(\pi/3)$$

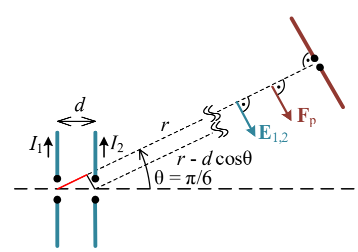
$$= 10^2 \cdot \left(\frac{2/3}{4\pi \cdot 10^4}\right)^2 \cdot 10^{1,2} \cdot \frac{120\pi}{\pi \cdot 73\,\Omega} \left| \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{3}} \right|^2 \approx 49\,\text{nW}$$

Задатак 496.
Задатак илуструје зрачење „антенског низа“ од два четвртталасна монопола, постављена вертикално изнад савршено проводне равни.



$\underline{I}_1 = I = 8\,\text{A}$
$\underline{I}_2 = I\text{e}^{\text{j}\delta}$
$r = 15\,\text{km}$
$f = 12\,\text{MHz}$
$d = \dfrac{\lambda}{2}$

Индуковану емс на пријему рачунамо као скаларни производ



$$\underline{\varepsilon} = \frac{\lambda}{\pi} \underline{\mathbf{E}}_{\text{rez}} \cdot \underline{\mathbf{F}}_{\text{p}}\,,$$

при чему је $\underline{\mathbf{F}}_{\text{p}} = 1$, због угла гледања од $\pi/2$. Резултантно електрично поље предајних монопола се добија суперпозицијом

$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{rez}} = \underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{\mathbf{E}}_2$$
$$= \frac{\text{j}Z_0}{2\pi} I \frac{1}{r} F(\pi/2 - \theta)\left[\text{e}^{-\text{j}\beta r} + \text{e}^{-\text{j}\beta(r - d\cos\theta)}\text{e}^{\text{j}\delta}\right]\mathbf{i}_\theta = \underline{E}_1\left[1 + \text{e}^{\text{j}(\delta + \beta d\cos\theta)}\right]\cdot$$

Максимум зрачења наступа када је

$$\delta + \beta d\cos\theta = 2n\pi, \quad n = 0,1,2,...$$

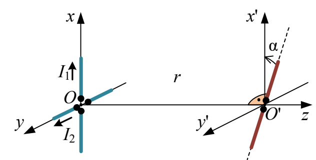
На пример, ако је

$$\delta_0 = -\beta d\cos\theta = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2},$$

онда следи максимална емс

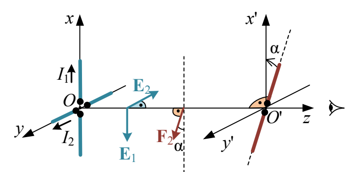
$$\varepsilon_{\max} = \frac{\lambda}{\pi}\cdot 2\left|\underline{\mathbf{E}}_1\right| = \frac{\lambda}{\pi}\cdot 2\cdot\frac{Z_0 I}{2\pi r}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} \approx 0{,}42\,\mathrm{V}.$$

Задатак 488.
Задатак илуструје зрачење укрштених дипола.
$\underline{I}_1 = I = 3\,\mathrm{A}$
$\underline{I}_2 = \mathrm{j}2I$
$r = 12\,\mathrm{km}$
$f = 75\,\mathrm{MHz}$



Индукована емс гласи

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\pi}\cdot\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{rez}}\cdot\underline{\mathbf{F}}_{\mathrm{p}},$$



а електрично поље добијамо суперпозицијом. За први дипол имамо

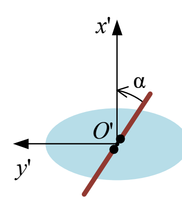
$$\underline{\mathbf{E}}_1 = \frac{\mathrm{j}Z_0}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r}\cdot I\cdot 1\cdot(-\mathbf{i}_x),$$

а за други

$$\underline{\mathbf{E}}_2 = \mathrm{j}2\underline{E}_1\cdot(-\mathbf{i}_y).$$

Укупно електрично поље је стога

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{rez}} = \underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{\mathbf{E}}_2 = \underline{E}_1(-\mathbf{i}_x - \mathrm{j}2\mathbf{i}_y),$$



(што одговара елиптичкој поларизацији!)
На пријемној страни имамо

$$\underline{\mathbf{F}}_{\mathrm{p}} = -\cos\alpha\,\mathbf{i}_x + \sin\alpha\,\mathbf{i}_y \,,$$

те је индукована емс

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\lambda}{\pi}\cdot \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{rez}} \cdot \underline{\mathbf{F}}_{\mathrm{p}} = \frac{\lambda}{\pi}\underline{E}_1(\cos\alpha - \mathrm{j}2\sin\alpha)\,.$$

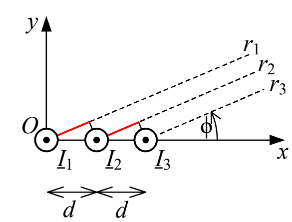
Њена ефективна вредност гласи

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\pi}\cdot E_1\sqrt{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha} = \frac{\lambda}{\pi}E_1\sqrt{1+3\sin^2\alpha}\,.$$

Максимизујући израз под кореном, за нпр. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, имамо максималну емс,

$$\varepsilon_{\max} = 2\frac{\lambda}{\pi}E_1 \approx 38\,\mathrm{mV}\,.$$

Задатак 505.
Задатак илуструје зрачење антенског низа састављеног од три полуталасна дипола, чије су струје напајања фазно померене, а осе постављене на једнаким растојањима.



$\underline{I}_1 = I_0$

$\underline{I}_2 = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta}$

$\underline{I}_3 = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\delta}$

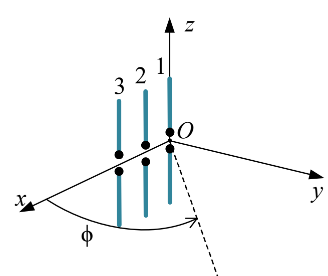
$\delta = -\frac{2\pi}{3}$

$d = 20\,\mathrm{cm}$

$I_0 = 1\,\mathrm{A}$

$f = 500\,\mathrm{MHz}$

$R = 10\,\mathrm{km}$



(а) Одређивање правца максималног зрачења

Растојања појединачних елемената од тачке посматрања су редом

$r_1 = R\,,$

$r_2 = R - d\cos\phi\,,$

$r_3 = R - 2d\cos\phi$.

Резултанатно електрично поње износи

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{rez}} = \underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{\mathbf{E}}_2 + \underline{\mathbf{E}}_3 = \frac{\mathrm{j}Z_0}{2\pi} I_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta d\cos\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta d\cos\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\delta}\right)\cdot 1\cdot \mathbf{i}_\theta .$$

Ово личи на геометријски низ, чији основин елемент је

$$\underline{q} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Psi},\ \ \Psi = \beta d\cos\phi + \delta .$$

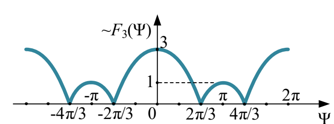
Следи да је

$$\left|\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{rez}}\right| = \frac{Z_0 I_0}{2\pi r}\left|1 + \underline{q} + \underline{q}^2\right| ,$$

$$\left|\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{rez}}\right| = \frac{Z_0 I_0}{2\pi r}\left|\frac{\underline{q}^3 - 1}{\underline{q} - 1}\right| = \frac{Z_0 I_0}{2\pi r}\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\Psi} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Psi} - 1}\right| = \frac{Z_0 I_0}{2\pi r}\overbrace{\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\Psi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\Psi}{2}}}\right|}^{1}\cdot\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\Psi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\Psi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\Psi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\Psi}{2}}}\right| ,$$

$$\left|\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{rez}}\right| = \frac{Z_0 I_0}{2\pi r}\cdot\overbrace{\left|\frac{\sin\left(\frac{3\Psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right)}\right|}^{F_3(\Psi)}$$

Функцију можемо испитати за карактеристичне вредности аргумента. Конкретно, за



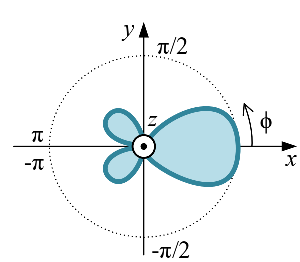
$\Psi = 0 = \beta d\cos\phi + \delta \quad \Rightarrow \quad F_3(0) = 3$ (добија се применом Лопиталовог правила јер се има вредност 0/0). Следи

$$\cos\phi = -\frac{\delta}{\beta d} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{3}} = 1 \ \Rightarrow\ \phi = 0 ,$$

што одговара уједно и максималном правцу зрачења. У правцима за које је

$$(\ldots)\ \Rightarrow\ \beta d\cos\phi + \delta = n\pi \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\phi = 0 \\ \cos\phi = \pm 2\pi/3 \end{pmatrix}$$

имамо локалне максимуме, а минимуми (нуле) су дати у правцима



$$\begin{pmatrix} 3\Psi/2 = n\pi \\ \Psi/2 \neq n\pi \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \beta d\cos\phi + \delta = \frac{2}{3}n\pi \Rightarrow \cos\phi = n+1 \ \Rightarrow\ \phi = \pm\frac{\pi}{2}, \pi$$

Сва питања у вези са наставним материјалом студенти могу да упуте предметном наставнику електронском поштом на nbasta@etf.rs .