Предмет: **Електромагнетика (ОТ)**
Шифра: **13E072TEM**
Асистент: Никола Баста

НАСТАВА НА ДАЉИНУ

ВЕЖБЕ, 8. СЕДМИЦА, 30. МАРТ-5. АПРИЛ 2020.

Литература:
[1] Б. М. Нотарош, В. В. Петровић, М. М. Илић, А. Р. Ђорђевић, Б. М. Колунџија, М. Б. Драговић, „Збирка испитних питања и задатака из Електромагнетике", Академска мисао, Београд, 2008.
[2] Испитни задаци са претходних рокова, http://em.etf.rs/rokovi.htm

Задатак 197.
Задатак је урађен у збирци. Задатак се бави прорачуном губитака у проводнику услед дејства вртложних струја, односно индукованог електричног поља.

Промењљива магнетска индукција соленоида $\underline{\mathbf{H}}$ ствара индуковано електрично поље у диску, $\underline{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$. Одзив диска на такву побуду јесу вртложне струје $\underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$, које опет стварају сопствено магнетско поље $\underline{\mathbf{H}}_0$. Магнетско поље $\underline{\mathbf{H}}_0$ такође утиче на индуковано електрично поље $\underline{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$, итд. Овако спрегнуте једначине није могуће решити класичним методама. У први мах се стога занемарује магнетско поље диска $\underline{\mathbf{H}}_0$, а прорачун следи као у збирци.

Џулове губитке рачунамо постепено, преко запреминске густине губитака,

$$P_J = \int_v p_J \mathrm{d}v = \int_v \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* \mathrm{d}v = \int_v \sigma \left|\underline{\mathbf{E}}_{\text{ind}}\right|^2 \mathrm{d}v\,,$$

где је $\mathrm{d}v = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\delta$. Цилиндрични координатни систем се своди на поларни због мале дебљине диска. Остаје, стога, само двоструки интеграл уместо троструког, какав је очекиван код интеграције по запремини.

За проверу оправданости занемаривања сопственог магнетског поља диска, морамо то поље прорачунати и то најбоље у центру диска јер је ту најјаче,

$$\underline{\mathbf{H}}_0 = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\underline{\mathbf{J}}\mathrm{d}v \times \mathbf{i}_R}{R^2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} R = r \\ \mathbf{i}_R = -\mathbf{i}_r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ldots$$

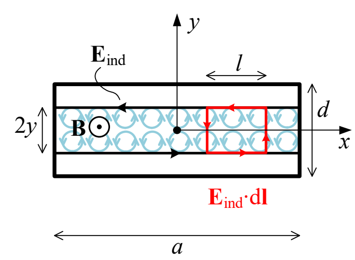
Потребно је да буде испуњено $\left|\underline{\mathbf{H}}_0\right| << \left|\underline{\mathbf{H}}\right|$ да би се сопствено магнетско поље диска могло занемарити.

Задатак 205. (За домаћи погледати задатак 203.)
Циљ је да се одреди средња снага Џулових губитака у пакету од N лимова који се налазе у хомогеном квазистационарном магнетском пољу, које је сложенопериодична функција времена. С обзиром на то да лимови због изолације међусобно нису галвански спојени, укупне Џулове губитке добијамо као $P_{\mathrm{J}} = NP_{\mathrm{J1}}$, где је P_{J1} средња снага Џулових губитака у једном лиму. Средња снага губитака у једном лиму износи

$$P_{\mathrm{J1}} = \int_v \sigma\overline{(E_{\mathrm{ind}}(t))^2}\mathrm{d}v = \int_v \sigma(E_{\mathrm{ind,eff}})^2\,\mathrm{d}v \text{, где је } \bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t \text{ оператор}$$

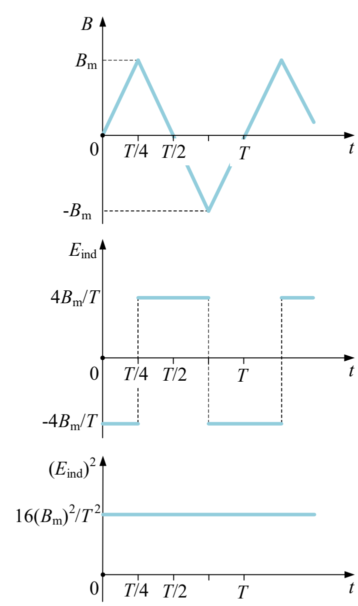
средње вредности, а домен v се односи на запремину једног лима.

На основу Фарадејевог закона можемо одредити индуковано електрично поље. Како је лим јако танак $(a >> d)$, може се претпоставити да ће струјнице, а тиме и линије индукованог електричног поља, бити хоризонталне и независне од x координате (на крајевима лима постојаће и линије електричног поља које нису хоризонталне, али њихов допринос занемарујемо). То можемо објаснити и низом малих контура, које би представљале локалне линије индукованог електричног поља, као на слици. Резултантна контура је издужени правоугаоник чија хоризонтална ивица је доминантна. За произвољни правоугаоник постављен симетрично у односу на x-осу (контура црвене боје на слици), пишемо



$$\oint_C E_{\mathrm{ind}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \Rightarrow \; E_{\mathrm{ind}}\cdot 2l = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot 2ly \Rightarrow \boxed{E_{\mathrm{ind}}(t) = -\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}y}.$$

Тестераст сигнал магнетске индукције можемо интерпретирати као део-по-део линеарну функцију. Електрично поље је сразмерно изводу магнетске индукције у времену, који се графичким путем лако своди на поворку правоугаоних импулса (слика). Ефективну вредност периодичног сигнала налазимо коначно као



$$E_{\mathrm{ind,eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(E_{\mathrm{ind}}(t)\right)^2\mathrm{d}t} = \frac{4B_{\mathrm{m}}}{T}y \;.$$

Сада можемо одредити средњу снагу губитака као

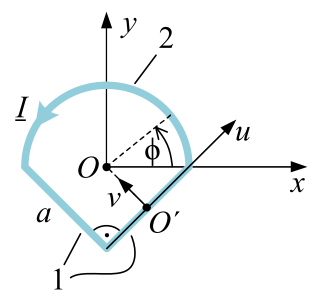
$$P_{\mathrm{J}} = N\cdot\int_{-d/2}^{d/2}\sigma\frac{16B_{\mathrm{m}}^2}{T^2}y^2\cdot\overbrace{abdy}^{\mathrm{d}v},$$

$$\boxed{P_{\mathrm{J}} = \frac{4N\sigma B_{\mathrm{m}}^2 abd^3}{3T^2}}\;.$$

Напомена: У збирци (издање 2008.) је резултат погрешан!

Задатак 211.

Како у тексту поменути Поинтингов вектор још увек није предаван, задатак ћемо мало изменити. Уместо Поинтинговог вектора, одредимо у тачки O (а) вектор јачине магнетског поља и (б) вектор јачине електричног поља.



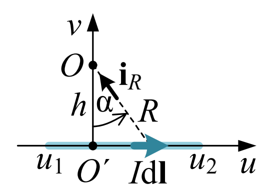
РЕШЕЊЕ

(а) Пошто имамо простопериодичну побуду, задатак можемо решити у комплексном домену, а јачина струје је $\underline{I} = I$. Ради примене суперпозиције, нека два равна сегмента контуре буду означени бројем 1, а лучни део бројем 2. Позабавићемо се најпре равним сегментима.

Наиме, због симетрије допринос једног и другог равног сегмента магнетском пољу у тачко O је исти, па је довољно наћи поље само једног сегмента

$$\underline{\mathbf{H}}_1 = \underline{\mathbf{H}}_{1'} + \underline{\mathbf{H}}_{1''} = 2\underline{\mathbf{H}}_{1'} .$$

Потребно је, дакле, израчунати магнетско поље планарне жице коначне дужине у тачки која је на растојању h. Ради лакшег разматрања, усвојићемо помоћни координатни систем $O'uv$. Узећемо у обзир да у систему координати (u, v, w) важи $\mathbf{i}_w = \mathbf{i}_z$. На слици је приказан сегмент произвољне дужине на оси u и помоћна променљива, угао α. Знамо да је у општем случају за линијску расподелу струје елемент поља



$$\mathrm{d}\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{i}_R}{R^2} ,$$

а са слике имамо $\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}u\,\mathbf{i}_u$, $\mathbf{i}_u \times \mathbf{i}_R = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\mathbf{i}_z = \cos\alpha\,\mathbf{i}_z$.

Са слике такође можемо очитати релације $\left\{\begin{array}{l} R = \sqrt{h^2 + u^2} \\ h = \frac{a}{2} = R\cos\alpha \\ u = R\sin\alpha \end{array}\right\}$.

Након диференцирања нпр. друге једначине из угластих заграда, добијамо релацију $R\mathrm{d}\alpha = \cos\alpha\mathrm{d}u$. Даље рачунамо поље као

$$\underline{\mathbf{H}}_1 = 2 \cdot \frac{1}{4\pi}\int_{u_1}^{u_2}\frac{I\cos\alpha\mathrm{d}u}{R^2}\,\mathbf{i}_z = \frac{1}{2\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{I\cos\alpha\mathrm{d}u}{R^2}\,\mathbf{i}_z$$

$$\underline{\mathbf{H}}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{h\cos\alpha}\mathbf{i}_z = \frac{\sqrt{2}I}{\pi a}\mathbf{i}_z$$

Одређивање магнетског поља лучног дела жице је тривијално. Полазећи од општег израза за магнетско поље долазимо лако до сведеног облика који одговара планарним контурама

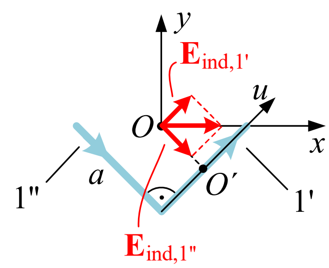
$$\underline{\mathbf{H}}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{I\mathrm{d}\phi}{R(\phi)}\mathbf{i}_z = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{I\mathrm{d}\phi}{a/\sqrt{2}}\mathbf{i}_z = \frac{I}{2\sqrt{2}a}\mathbf{i}_z$$

Укупно поље добијамо сабирањем,

$$\boxed{\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_1 + \underline{\mathbf{H}}_2 = \frac{I}{2\sqrt{2}\pi a}(\pi+4)\mathbf{i}_z}.$$

(б) Жица је танка и хомогена и сматраћемо да у њој нема гомилања вишка наелектрисања. Следи да је укупно поље $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{ind}}$. Ослањајући се на ознаке из тачке (а), и вектор електричног поља одредићемо поступно, из два корака. За линијску расподелу струје важи

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{ind}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{A}} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\int_C\frac{\underline{I}\mathrm{d}\mathbf{l}}{R}$$



Због симетрије, допринос једног и другог сегмента електричном пољу је једнак у скаларном смислу. Вектор електричног поља једног сегмента ће бити паралелан том сегменту, јер је израз пропорционалан интегралу векторских струјних елемената који су константног правца. За први сегмент то је правац $+u$ осе, а за други у правцу $-v$ осе. Једино што се мења, јесте растојање од тачке посматрања, но то не мења наш закључак. Следи да је

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{ind,1}} = 2\underline{E}_{\mathrm{ind,1'}}\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i}_x$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{ind,1}} = 2\cdot\left(-\mathrm{j}\omega\cdot\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{\sqrt{u^2+h^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}_x,$$

$$= -\mathrm{j}\omega\cdot\frac{\mu_0\sqrt{2}I}{4\pi}\ln\left(u+\sqrt{u^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)\Bigg|_{-a/2}^{a/2}\mathbf{i}_x.$$

Коначно,

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{ind,1}} = -\mathrm{j}\omega\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\mathbf{i}_x.$$

За лучни део, из израза за индуковано електрично поље линијске расподељене струје следи

$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{ind},2} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{I\cdot\overbrace{R\mathrm{d}\phi\,\mathbf{i}_\phi}^{\mathrm{d}\mathbf{l}}}{R} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi}(-\mathbf{i}_x\sin\phi+\mathbf{i}_y\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi\,.$$

Израчунавањем интеграла добијамо

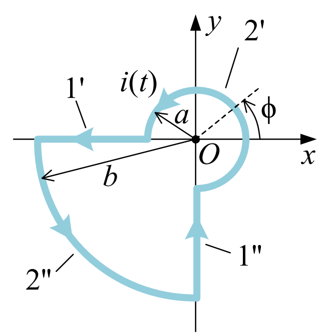
$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{ind},2} = \mathrm{j}\omega\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathbf{i}_x\,.$$

Сабирањем, резултантни вектор јачине електричног поља је

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}}_{\text{ind}} = \underline{\mathbf{E}}_{\text{ind},1} + \underline{\mathbf{E}}_{\text{ind},2} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)-1\right]\mathbf{i}_x}\,.$$

Задатак 213.

Задатак се ради на сличан начин као задатак 211. Како није задат временски облик јачине струје, приступамо решавању у временском домену. Уместо Поинтинговог вектора, одредићемо у тачки O (а) вектор јачине магнетског поља и (б) вектор јачине електричног поља.



(а) Идентификујемо четири сегмента жице: два лучна (1' и 1") и два права (2' и 2"). Струја у правим сегментима не доприноси магнетском пољу у посматраној тачки O, јер се она налази на пресеку оса сегмената. Допринос лучних сегмената рачунамо поново помоћу формуле за планарне контуре

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int_C\frac{i\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{i}_R}{R^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{i\mathrm{d}\phi}{R(\phi)}\mathbf{i}_z\,.$$

Конкретно,

$$\mathbf{H}_{2'} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi}\frac{i\mathrm{d}\phi}{a}\mathbf{i}_z \text{ и } \mathbf{H}_{2''} = \frac{1}{4\pi}\int_{\pi}^{3\pi/2}\frac{i\mathrm{d}\phi}{b}\mathbf{i}_z\,.$$

Следи да је

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{H}_{2'} + \mathbf{H}_{2''} = \frac{i}{8}\left(\frac{1}{b}+\frac{3}{a}\right)\mathbf{i}_z}\,.$$

(б) Занемарујући електрично поље услед вишка наелектрисања, сматрамо да је укупно поље одређено са $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_{\text{ind}}$.
Вектори индукованог електричног поља услед струје на сегментима 1' и 1" имаће, због симетрије, исту скаларну вредност, али другачију оријентацију. Довољно је стога одредити поље само једног правог сегмента и применити аналогију на други. У општем случају за поље жице са споропроменљивом струјом важи

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{(\partial i/\partial t)\mathrm{d}\mathbf{l}}{R} .$$

Ако посматрамо сегмент 1', имамо споропроменљиву струју која је у просторном смислу константна дуж сегмента, стога можемо написати

$$\mathbf{E}_{\text{ind},1'} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial i}{\partial t}\int_{C_{1'}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{R} .$$

На овом месту треба посебно обратити пажњу на то како линијски интеграл исправно применити у датом координатном систему (Декартовом, у овом случају). Да ли интегралити од од $-a$ до $-b$ или обратно?
Векторски померај $\mathrm{d}\mathbf{l}$ је дефинисан као позитиван прираштај у правцу и референтном смеру линијске струје, тј. $\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}l \cdot \mathbf{i}_l$, где је $\mathrm{d}l > 0$. Сегмент 1' се налази на интервалу $x \in [-b,-a]$, а ток струје је у правцу $-x$ осе. Пошто је $\mathrm{d}l > 0$, у датом координатном систему је

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}l &= |dx| \\ \mathbf{i}_l &= -\mathbf{i}_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}\mathbf{l} = |\mathrm{d}x| \cdot (-\mathbf{i}_x) .$$

Потег је одређен са $R = |x| > 0$. Кад уврстимо дате смене у израз за поље, можемо произвољно бирати редослед граница интеграла

$$\mathbf{E}_{\text{ind},1'} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial i}{\partial t}\int_{-a}^{-b} \frac{|\mathrm{d}x|}{|x|}(-\mathbf{i}_x) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial i}{\partial t}\int_{-a}^{-b} \frac{-\mathrm{d}x}{-x}(-\mathbf{i}_x) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial i}{\partial t}\ln\frac{b}{a}(-\mathbf{i}_x) .$$

(Препоручује се да се за вежбу интеграл израчуна и са замењеним границама, од $-b$ до $-a$. Видеће се како границе интеграла директно регулишу предзнак интегранда, односно бројиоца $|\mathrm{d}x|$)

На основу аналогије, рачунамо поље другог правог сегмента као

$$\mathbf{E}_{\text{ind},1''} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial i}{\partial t}\int_{-b}^{-a} \frac{|\mathrm{d}y|}{|y|}\mathbf{i}_y = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial i}{\partial t}\ln\frac{b}{a}\mathbf{i}_y$$

Електрично поље лучних сегмената можемо израчунати здружено

$$\mathbf{E}_{\text{ind},2'} + \mathbf{E}_{\text{ind},2''} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial i}{\partial t}\left[\int\limits_{C_{2'}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{R} + \int\limits_{C_{2''}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{R}\right] = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial i}{\partial t}\left(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi} \frac{a\,\mathrm{d}\phi\,\mathbf{i}_\phi}{a} + \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} \frac{b\,\mathrm{d}\phi\,\mathbf{i}_\phi}{b}\right)$$

$$\mathbf{E}_{\text{ind},2'} + \mathbf{E}_{\text{ind},2''} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial i}{\partial t}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\,\mathbf{i}_\phi = 0\,. \qquad \left(i_\phi = -\sin\phi\,\mathbf{i}_x + \cos\phi\,\mathbf{i}_y\right)$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{\text{ind}} = \mathbf{E}_{\text{ind},1'} + \mathbf{E}_{\text{ind},1''} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)(\mathbf{i}_y - \mathbf{i}_x)}.$$

Задатак 219.
Задатак је урађен у збирци. У задатку се илуструје принцип рада мерача брзина протока течности.

За домаћи решити следеће варијанте задатка 219:

219.1. Одредити струју кратког споја који се налази између електрода уместо волтметра, ако је позната брзина протока течности v са референтним смером са слике.

219.2. Одредити напон празног хода између електрода, ако је на месту волтметра отворена веза и ако је позната брзина протока течности v са референтним смером са слике.

Напомена:
Варијанте задатка 219 решити применом теорије поља. Усвојити референте смерове релевантних вектора и дискутовати баланс два вида електричног поља. Претпоставке и решења на крају проверити помоћу еквивалентних електричних кола.

Сва питања у вези са наставним материјалом студенти могу да упуте предметном наставнику електронском поштом на nbasta@etf.rs .