Предмет: **Електромагнетика (ОТ)**
Шифра: **13E072ТЕМ**
Асистент: Никола Баста

НАСТАВА НА ДАЉИНУ

ВЕЖБЕ, 9. СЕДМИЦА, 6-12. АПРИЛ 2020.

Литература:

[1] Б. М. Нотарош, В. В. Петровић, М. М. Илић, А. Р. Ђорђевић, Б. М. Колунџија, М. Б. Драговић, „Збирка испитних питања и задатака из Електромагнетике“, Академска мисао, Београд, 2008.

[2] Испитни задаци са претходних рокова, http://em.etf.rs/rokovi.htm

Задатак 257. - варијанта

Написати потпун систем једначина у диференцијалном облику у комплексном домену за брзопроменљиво електромагнетско поље ако је у свакој тачки средине познат (а) вектор густине побудне струје $\underline{\mathbf{J}}_\mathrm{i}$ и (б) вектор јачине побудног поља $\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}$. (в) Извести једначину континуитета за оба случаја.

РЕШЕЊЕ:

(а)

$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{B}}$,

$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + \underline{\mathbf{J}}_\mathrm{i} + \mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{D}}}$,

$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{D}} = \underline{\rho}$,

$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{B}} = 0$,

$\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{P}}$,

$\underline{\mathbf{H}} = \dfrac{\underline{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \underline{\mathbf{M}}$,

$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{E}})$,

$\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{B}})$,

$\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{E}})$.

(б)

$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{B}}$,

$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + \mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{D}}$,

$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{D}} = \underline{\rho}$,

$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{B}} = 0$,

$\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{P}}$,

$\underline{\mathbf{H}} = \dfrac{\underline{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \underline{\mathbf{M}}$,

$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{E}})$,

$\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{B}})$,

$\boxed{\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i})}$.

(в) Ако се примени дивергенција са на другу једначину, следе одговарајуће једначине континуитета,

$\mathrm{div}(\underline{\mathbf{J}} + \underline{\mathbf{J}}_\mathrm{i}) = -\mathrm{j}\omega\underline{\rho}$, $\qquad$ $\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{J}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\rho}$.

Коментар:

(а) Побудне струје $\underline{\mathbf{J}}_\mathrm{i}$ сматрамо независним генератором који је извор магнетског поља (друга једначина).

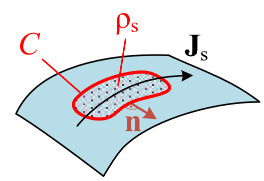
(б) Побудно поље $\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{i}$ представља генератор независан од струја у датој средини. Оно резултује силом која покреће наелектрисања и фигурише у једначини за густину струје (девета једначина).

Испитни задатак.
Написати једначину континуитета у диференцијалном облику и комплексном домену, у средини у којој нема побудних струја, за случај (а) запремински, (б) површински и (в) линијски расподељене струје. (г) Написати граничне услове за брзопроменљиво струјно поље у датим случајевима.

РЕШЕЊЕ:
(а) Запремински случај је већ разматран у претходним поглављима, а једначина континуитета гласи

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{J}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\rho}\,.$$

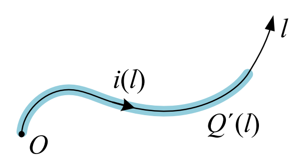
(б) У случају површинске расподеле, посматра се дивергенција редуковане димензије, па је са десне стране једнакости површинска густина наелектрисања. Формално, једначина континуитета је аналогна оној у случају запреминске расподеле



$$\mathrm{div}_s\,\underline{\mathbf{J}}_s = -\mathrm{j}\omega\underline{\rho}_s\,.$$

Оператор дивергенције за површинску геометрију div_s треба увек разматрати у контексту флукса. Флукс се у овом редукованом облику посматра кроз *линију*, а не кроз површ. Нормала на линију се дефинише као нормала на тангенту на линију.

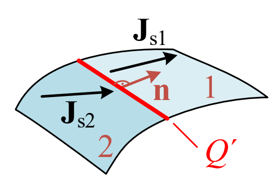
Код линијске расподеле струје, дивергенција се своди на извод дуж криволинијске координате у општем случају,



(в) $\dfrac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}l} = -\mathrm{j}\omega\underline{Q}'$

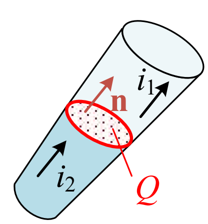
(г) Гранични услови за запреминску расподелу струје су већ познати, па одмах можемо написати резултат,

$$\mathbf{n}\cdot(\underline{\mathbf{J}}_1 - \underline{\mathbf{J}}_2) = -\mathrm{j}\omega\underline{\rho}_s\,.$$



За случај површинске расподеле струје, граница је линија између два површинска домена, те једначина континуитета гласи

$$\mathbf{n}\cdot(\underline{\mathbf{J}}_{s1} - \underline{\mathbf{J}}_{s2}) = -\mathrm{j}\omega\underline{Q}'$$



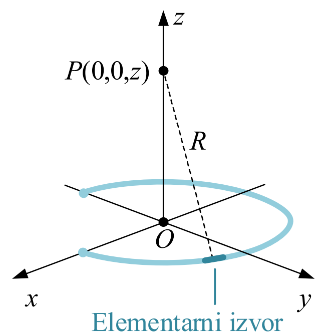
У случају линијске расподеле струје, граница је тачка на споју две лније или танке жице (увећан приказ је дат на слици). Ако су референтни смерови две струје усклађени, онда важи

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 = -\mathrm{j}\omega\underline{Q}\,.$$

За домаћи задатак се препоручује да се претходна два задатка под (а), (б) и (в)ураде у временском домену и/или интегралном облику.

Задатак 298.

Задатак илуструје примену интегралних израза за закасселе потенцијале и поља.



(а) За одређивање расподеле наелектрисања на контури, одређујемо најпре комплексног представника струје

$\underline{I} = I_0 \sin\phi$.

Коришћењем израза под (в) из претходног задатка и $\mathrm{d}l = a\mathrm{d}\phi$, добијамо

$$\underline{Q}' = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\underline{I}(l) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(I_0\sin\phi\right) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega a}I_0\cos\phi$$

(б) Магнетски вектор потенцијал добијамо из интегралног израза. Уопштен израз за запреминску расподелу струје гласи

$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_v \frac{\underline{\mathbf{J}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}\mathrm{d}v}{R}$, где је $\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ фазни коефицијент средине, а $R = \sqrt{a^2+z^2} = \mathrm{const}$.

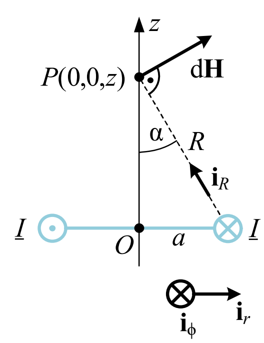
Адекватан израз за линијску расподелу струје добијамо заменом $\underline{\mathbf{J}}\mathrm{d}v \to \underline{I}\mathrm{d}\mathbf{l}$, где је $\mathrm{d}\mathbf{l} = a\mathrm{d}\phi\,\mathbf{i}_\phi = a\mathrm{d}\phi(-\sin\phi\,\mathbf{i}_x + \cos\phi\,\mathbf{i}_y)$. Следи

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_C \frac{\underline{I}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}\mathrm{d}\mathbf{l}}{R} = \frac{\mu_0 I_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}a}{4\pi R}\int\limits_0^{3\pi/2}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathbf{i}_\phi = \frac{\mu_0 I_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}a}{4\pi R}\left(-\frac{3\pi}{4}\mathbf{i}_x + \frac{1}{2}\mathbf{i}_y\right).$$

(в) Одређивање електричног скалар-потенцијала се ради на сличан начин, полазећи од интегралног израза за линијску расподелу наелектрисања,

$$\underline{\mathbf{V}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_C \frac{\underline{Q}'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}\mathrm{d}\mathbf{l}}{R} = \int\limits_0^{3\pi/2}\frac{\left(-\frac{1}{\mathrm{j}\omega a}I_0\cos\phi\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{4\pi\varepsilon_0 R}a\,\mathrm{d}\phi\,\mathbf{i}_\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{\mathrm{j}\omega R}$$

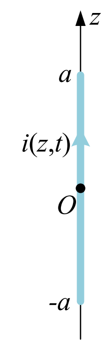
(г) Одређивање вектора јачине магнетског поља је урађено у збирци. На помоћној слици је приказан елементарни вектор магнетског поља, где је



$\frac{a}{R} = \sin\alpha$ и $\frac{z}{R} = \cos\alpha$.

Домаћи:
Помоћу једначине континуитета одредити тачкасто наелектрисање на крајевима жице, као и његов допринос електричном скалар-потенцијалу. Тачкасто наелектрисање у збирци није разматрано.
(РЕШЕЊЕ: $\underline{Q}_1(\phi = 0) = -I_0 / \mathrm{j}\omega$, $\underline{Q}_2(\phi = 3\pi/2) = 0$)

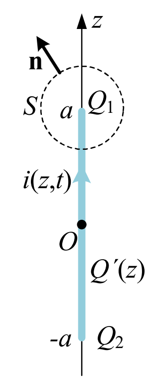
Испитни задатак. У вакууму постоји брзопроменљива струја само дуж танке жице, дужине $2a$, као на слици. Јачина струје дата је изразом $i(z,t) = \sqrt{2} I_0 \cos(\omega t - \beta z)$, где је $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. (а) Одредити расподелу наелектрисања жице. Одредити у тачки $M(0,0,z>a)$ (б) магнетски вектор потенцијал и (в) вектор магнетске индукције.



РЕШЕЊЕ:
(а) Најпре ћемо одредити јачину струје у комплексном облику као $\underline{I} = I_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$. Коришћењем једначине континуитета у диференцијалном облику за линијски расподељене струје рачунамо подужно наелектрисање

$$\underline{Q}' = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\frac{\mathrm{d}\underline{I}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\beta}{\omega} I_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} .$$

Тачкасто наелектрисање испитујемо на крајевима жице. Око тачке $z = a$ постављамо Гаусову површ S и применом једначине континуитета у интегралном облику, добијамо наелектрисање на позитивном крају жице (водећи рачуна о референтном смеру струје),



$$\oint_S \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\mathrm{j}\omega \int_v \rho \,\mathrm{d}v \;\Rightarrow\; -\underline{I}(z=a) = -\mathrm{j}\omega \underline{Q}_1 ,$$

$$\Rightarrow \underline{Q}_1 = \frac{I_0}{\mathrm{j}\omega} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta a} .$$

Аналогно се добија за тачку $z = -a$,

$$\underline{Q}_2 = -\frac{I_0}{\mathrm{j}\omega} \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta a}$$

(б) Магнетски вектор потенцијал директно одређујемо из интегралног облика

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\underline{I}(l) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R} \mathrm{d}\mathbf{l}}{R} .$$

Пре него што извршимо интеграцију, потребно је да уведемо помоћну променљиву z' ,

$$\left\{\begin{array}{l} l = z', \ -a \le z' \le a \\ \mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}z'\mathbf{i}_z \\ R = |z - l| = |z - z'| \end{array}\right\},$$

па добијамо

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{z'=-a}^{a} \frac{\overbrace{I_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z'}}^{\underline{I}(z')} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta|z-z'|}}{|z-z'|} \mathrm{d}z'\mathbf{i}_z \ .$$

Како је према услову задатка $z > a \ge z'$, након уклањања апсолутних вредности, следи

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \int\limits_{z'=-a}^{a} \frac{\mathrm{d}z'}{z - z'} \mathbf{i}_z = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \ln \frac{z+a}{z-a} \mathbf{i}_z$$

(обратити пажњу да, за дати интеграл по z', променљива z представља константу)

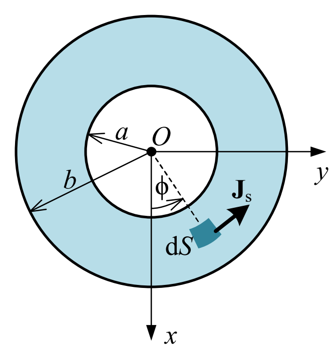
(в) Вектор магнетске индукције рачунамо помоћу израза у интегралном облику

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_C \frac{\underline{I}(l)(1 + \mathrm{j}\beta R)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R} \mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{i}_R}{R^2}.$$

Узевши у обзир да је $\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{i}_R = \mathrm{d}z'\mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_z = 0$, следи да је $\underline{\mathbf{B}} = 0$.

Задатак 296.

Да бисмо одредили вектор јачине електричног поља, издвојићемо две његове компоненте: електрично поље услед вишка наелектрисања и индуковано електрично поље,



$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_Q + \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{ind}} \ .$$

За одређивање поља $\underline{\mathbf{E}}_Q$, одредимо најпре расподелу наелектрисања на прстену. Приметимо да је вектор густине струје тангенцијалан на ободима прстена и да нема дисконтинуитета тока струје. Из тог разлога не разматрамо граничне услове на ободима прстена. Комплексни представник вектора густине струје гласи

$$\underline{\mathbf{J}}_{\mathrm{s}} = J_{\mathrm{s}0} \cos\frac{\phi}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta r} \mathbf{i}_{\phi} \ ,$$

а површинско наелектрисање добијамо помоћу дивергенције за цилиндрични, односно поларни координатни систем,

$$\mathrm{div}_\mathrm{s}\ \underline{\mathbf{J}}_\mathrm{s} = -\mathrm{j}\omega\underline{\rho}_\mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad \underline{\rho}_\mathrm{s} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\frac{1}{r}\frac{\partial \underline{J}_s}{\partial\phi} = \frac{J_{s0}}{2\mathrm{j}\omega r}\sin\frac{\phi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta r}.$$

Електрично поље услед вишка наелектрисања рачунамо помоћу интегралног израза за површинску расподелу наелектрисања

$$\underline{\mathbf{E}}_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\underline{\rho}_\mathrm{s}(1+\mathrm{j}\beta R)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}\,\mathbf{i}_R}{R^2}\mathrm{d}S, \text{ где је } \left\{\begin{matrix} R = r \\ \mathbf{i}_R = -\mathbf{i}_r = -\cos\phi\,\mathbf{i}_x - \sin\phi\,\mathbf{i}_y \\ \mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \end{matrix}\right\}.$$

Следи,

$$\underline{\mathbf{E}}_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(\frac{J_{s0}}{2\mathrm{j}\omega r}\sin\frac{\phi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta R}\right)(1+\mathrm{j}\beta r)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}\left(-\mathbf{i}_r\right)}{r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{J_{s0}}{8\pi\varepsilon_0\mathrm{j}\omega}\int_a^b\frac{1+\mathrm{j}\beta r}{r^2}\mathrm{d}r\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\sin\frac{\phi}{2}\cos\phi\,\mathbf{i}_x - \overbrace{\sin\frac{\phi}{2}\sin\phi}^{\text{интеграл овога је } 8/3}\ \mathbf{i}_y\right)\mathrm{d}\phi.$$

Интеграција непарне функције $\sin\frac{\phi}{2}\cos\phi$ на симетричном домену даће нулу, па преостаје само y-компонента поља

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}}_Q = \frac{J_{s0}}{3\pi\varepsilon_0\mathrm{j}\omega}\left(\frac{b-a}{ab} + \mathrm{j}\beta\ln\frac{b}{a}\right)(-\mathbf{i}_y)}.$$

Индуковано електрично поље $\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{ind}$ рачунамо преко магнетског вектор-потенцијала, и то његовог интегралног израза за површинску расподелу струје,

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{ind} = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{A}} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{\underline{\mathbf{J}}_s\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}\mathrm{d}S}{R} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\int_a^b\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(J_{s0}\cos\frac{\phi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}\,\mathbf{i}_\phi}{r}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

$$= -\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0 J_{s0}}{4\pi}\int_a^b\mathrm{d}r\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\cos\frac{\phi}{2}\sin\phi\,\mathbf{i}_x + \overbrace{\cos\frac{\phi}{2}\cos\phi}^{\text{интеграл овога је } 4/3}\ \mathbf{i}_y\right)\mathrm{d}\phi.$$

Интеграцијом, добијамо

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{ind} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0 J_{s0}}{3\pi}(b-a)\,\mathbf{i}_y}.$$

Укупно електрично поље је

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_Q + \underline{\mathbf{E}}_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu_0 \underline{J}_{s0}}{3\pi}\left[(b-a) - \frac{b-a}{\beta^2 ab} - \mathrm{j}\frac{\ln\frac{b}{a}}{\beta}\right]\mathbf{i}_y .}$$

Магнетско поље рачунамо површинским интегралом,

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\underline{\mathbf{J}}_s(1+\mathrm{j}\beta R)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}\mathrm{d}S \times \mathbf{i}_R}{R^2} = \frac{1}{4\pi}\int_a^b\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\underline{J}_{s0}\cos\frac{\phi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta r}(1+\mathrm{j}\beta r)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\,\mathbf{i}_z$$

$$= \frac{\underline{J}_{s0}}{4\pi}\int_a^b \frac{1+\mathrm{j}\beta r}{r}dr\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{\phi}{2}\mathrm{d}\phi\,\mathbf{i}_z$$

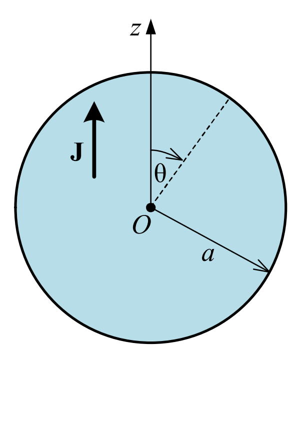
$$\boxed{\underline{\mathbf{H}} = \frac{\underline{J}_{s0}}{\pi}\left[\ln\frac{b}{a} + \mathrm{j}\beta(b-a)\right]\mathbf{i}_z .}$$

Домаћи:
1. Урадити задатак 295. Додатно, у истом задатку израчунати подужно наелектрисање, $\underline{Q}'$, на равним ивицама полупрстена које настаје услед дисконтинуитета тока површинске струје. Користити се граничним условима за струјно поље.

2. Урадити и задатак 279, са додатним захтевом одређивања подужног наелектрисања на ободу плоче.

Напомена: У задацима из збирке са бесконачно танким структурама, као што су жица, прстен или танки диск, наелектрисања на дисконтинуитетима струја су занемарена.

Испитни задатак
У вакууму, унутар сфере полупречника a, постоје простопериодичне струје високе кружне учестаности ω и комплексне густине $\underline{\mathbf{J}} = \underline{J}\, i_z$, где је $\underline{J}$ комплексна константа. Одредити (а) расподелу запреминских и површинских наелектрисања сфере, (б) електрични скалар-потенцијал у центру сфере, и (в) магнетски вектор-потенцијал у центру сфере (тачка O на слици).

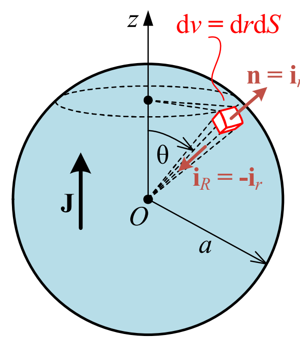


РЕШЕЊЕ:
(а) Густина струје је константна у просторном смислу, па је запреминско наелектрисање

$$\underline{\rho} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{J}} = 0 .$$

Површинску густину наелектрисања испитујемо на површи сфере помоћу граничних услова. Ако је спољашња средина означена са 1, а унутрашња са 2,

$$\underline{\rho}_s = -\frac{1}{j\omega}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = -\frac{1}{j\omega}\mathbf{i}_r\cdot(0 - J\,\mathbf{i}_z) = \frac{1}{j\omega}J\cos\theta\,.$$



(б) На основу симетричне расподеле наелектрисања на површи (косинусна расподела) можемо уочити једнак допринос позитивних и негативних наелектрисања електричном скалар-потенцијалу, па очекујемо да је јендак нули. Рачунањем преко интегралног израза добијамо

$$\underline{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\underline{\rho}_s e^{-j\beta R}}{R}dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{\left(\frac{1}{j\omega}J\cos\theta\right)e^{-j\beta a}}{a}\overbrace{a^2\sin\theta d\theta d\phi}^{dS} = 0\,.$$

(в) Магентски вектор-потенцијал рачунамо као

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\underline{\mathbf{J}}e^{-j\beta R}dv}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{Je^{-j\beta r}}{r}\mathbf{i}_z\,\overbrace{r^2\sin\theta dr d\theta d\phi}^{dv}\,.$$

Интеграцијом по ϕ, а затим и по θ, добија се

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0 J\,\mathbf{i}_z}{2}\int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d\theta = \mu_0 J\,\mathbf{i}_z\int_{r=0}^{r=a}e^{-j\beta r}\,r dr\,.$$

Ово није таблични интеграл, стога примењујемо парцијалну интеграцију,

$$\underline{\mathbf{A}} = \mu_0\mathbf{J}\int_{r=0}^{a}\frac{r\cdot d\left(e^{-j\beta r}\right)}{(-j\beta)}dr = \mu_0\mathbf{J}\left[\left.\frac{r\,e^{-j\beta r}}{(-j\beta)}\right|_{r=0}^{a} - \int_{r=0}^{a}\frac{e^{-j\beta r}}{(-j\beta)}dr\right]$$

$$= \mu_0\mathbf{J}\left[-\frac{1}{j\beta}ae^{-j\beta a} - \frac{1}{\left(-\beta^2\right)}\left.e^{-j\beta r}\right|_{r=0}^{a}\right].$$

Коначно,

$$\boxed{\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0\mathbf{J}}{\beta^2}\left[(1 + j\beta a)e^{-j\beta a} - 1\right]}.$$

Домаћи:
Урадити задатак 293.

Сва питања у вези са наставним материјалом студенти могу да упуте предметном наставнику електронском поштом на nbasta@etf.rs .