Поларизација временски простопериодичних вектора

Простопериодични вектор можемо описати компонентама у Декартовом координатном систему, које су простопериодичне величине исте учестаности и, у општем случају, различитих фаза и ефективних вредности

$$\mathbf{A}(t) = \sqrt{2}A_x \cos(\omega t + \theta_x)\mathbf{i}_x + \sqrt{2}A_y \cos(\omega t + \theta_y)\mathbf{i}_y + \sqrt{2}A_z \cos(\omega t + \theta_z)\mathbf{i}_z \,. \tag{1}$$

Комплексна представа овог вектора (жаргонски, "комплексни вектор") је векторска сума компоненти, чији су скаларни делови комплексне представе одговарајућих компоненти у временском домену,

$$\underline{\mathbf{A}} = A_x \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_x} \, \mathbf{i}_x + A_y \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_y} \, \mathbf{i}_y + A_z \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_z} \, \mathbf{i}_z \,. \tag{2}$$

Развојем експоненцијалних чланова у (2), коришћењем Ојлеровог обрасца, добијамо

$$\underline{\mathbf{A}} = \left(A_x \cos\theta_x \, \mathbf{i}_x + A_y \cos\theta_y \, \mathbf{i}_y + A_z \cos\theta_z \, \mathbf{i}_z\right) + \mathrm{j}\left(A_x \sin\theta_x \, \mathbf{i}_x + A_y \sin\theta_y \, \mathbf{i}_y + A_z \sin\theta_z \, \mathbf{i}_z\right), \tag{3}$$

односно

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\mathrm{Re}} + \mathrm{j}\mathbf{A}_{\mathrm{Im}} = \mathbf{A}_{\mathrm{Re}} + \mathbf{A}_{\mathrm{Im}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} \,, \tag{4}$$

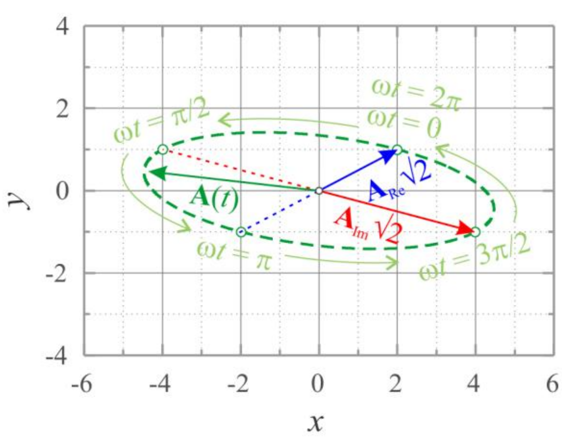
где су $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$ вектори у простору, а њихови називи (Re и Im) последица су тога што овај други стоји уз имагинарну јединицу у комплексној представи вектора $\underline{\mathbf{A}}$.

Повратак у временски домен врши се сумирањем временских представа вектора $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$,

$$\mathbf{A}(t) = \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} \cos\omega t + \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Im}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} \cos\omega t - \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Im}} \sin\omega t \,. \tag{5}$$

Из (5) се види да врх вектора $\mathbf{A}(t)$ (његов други крај је у координатном почетку) у току времена описује криву линију у равни коју чине координатни почетак и врхови вектора $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$.

Пример. Скицирати криву коју описује врх вектора $\mathbf{A}(t)$, чији је комплексни представник дат изразом $\underline{\mathbf{A}} = \left((2\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y) + \mathrm{j}(4\mathbf{i}_x - \mathbf{i}_y)\right)/\sqrt{2}$.



Решење: Пошто су $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} = (2\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y)/\sqrt{2}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}} = (4\mathbf{i}_x - \mathbf{i}_y)/\sqrt{2}$, коришћењем (5) добијамо криву са слике. Важи $\mathbf{A}(t + 2\pi/\omega) = \mathbf{A}(t)$. Видимо да се врх вектора $\mathbf{A}(t)$ током времена креће у одређеном смеру и описује криву која, на први поглед, изгледа као елипса.

Облик криве, коју описује врх вектора $\mathbf{A}(t)$, бисмо много лакше испитали ако би $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$ били просторно ортогонални, но, у општем случају, они то нису. Посматрајмо зато комплексни вектор $\underline{\mathbf{B}}$,

$$\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = (\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} + \mathrm{j}\mathbf{A}_{\mathrm{Im}})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = (\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} + \mathrm{j}\mathbf{A}_{\mathrm{Im}})(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta), \tag{6}$$

чија се представа у времену, $\mathbf{B}(t)$,

$$\mathbf{B}(t) = \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}\cos(\omega t + \theta) - \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}\sin(\omega t + \theta), \tag{7}$$

од $\mathbf{A}(t)$ разликује само по положају у почетном временском тренутку $t = 0$. Стога је облик криве коју у времену описује врх вектора $\mathbf{B}(t)$ исти као за вектор $\mathbf{A}(t)$. Множењем чланова у заградама (6) добијамо

$$\underline{\mathbf{B}} = (\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}\cos\theta - \mathbf{A}_{\mathrm{Im}}\sin\theta) + \mathrm{j}(\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}\sin\theta + \mathbf{A}_{\mathrm{Im}}\cos\theta) = \mathbf{B}_{\mathrm{Re}} + \mathrm{j}\mathbf{B}_{\mathrm{Im}}. \tag{8}$$

Проверимо постоји ли угао θ за који су вектори $\mathbf{B}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{Im}}$ просторно ортогонални, за шта је потребно да буде испуњен услов:

$$\mathbf{B}_{\mathrm{Re}} \cdot \mathbf{B}_{\mathrm{Im}} = 0 \Rightarrow (\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}\cos\theta - \mathbf{A}_{\mathrm{Im}}\sin\theta) \cdot (\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}\sin\theta + \mathbf{A}_{\mathrm{Im}}\cos\theta) = 0, \tag{9}$$

односно

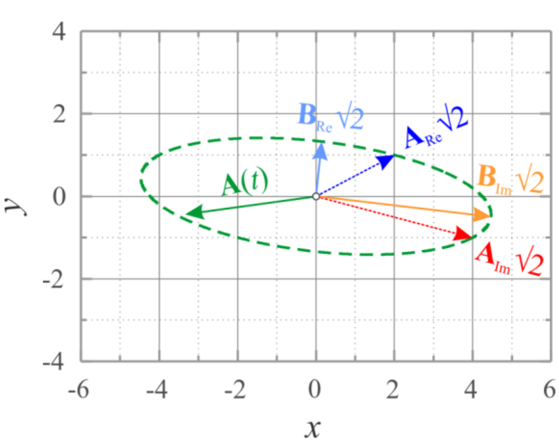
$$\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{Im}}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{Re}} - \mathbf{A}_{\mathrm{Im}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{Im}})\sin\theta\cos\theta = 0, \tag{10}$$

одакле је

$$\mathrm{tg}\,2\theta = \frac{2\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{Im}}}{|\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}|^2 - |\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}|^2}. \tag{11}$$

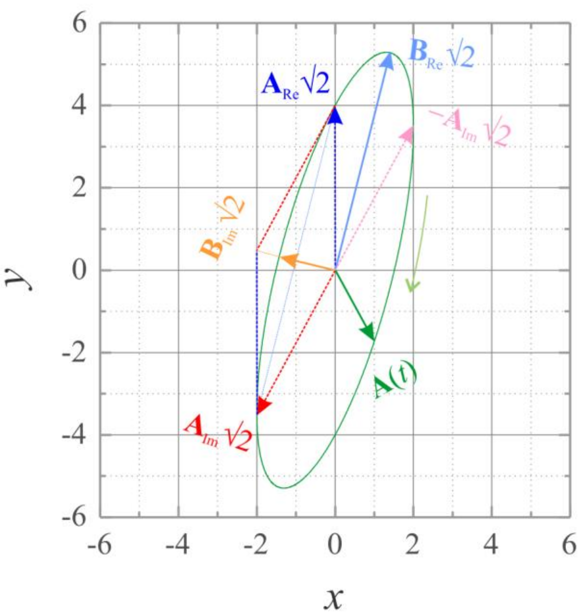
За сваки пар вектора $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$, који нису међусобно ортогонални ($\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{Im}} \neq 0$), коришћењем (11), могуће је одредити угао θ који, уврштен у (7), даје пар међусобно ортогоналних вектора, $\mathbf{B}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{Im}}$, таквих да врхови вектора $\mathbf{A}(t) = \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}\cos\omega t - \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}\sin\omega t$ и $\mathbf{B}(t) = \sqrt{2}\mathbf{B}_{\mathrm{Re}}\cos\omega t - \sqrt{2}\mathbf{B}_{\mathrm{Im}}\sin\omega t$ описују исту криву.

Пример. За комплексни вектор са $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} = (2\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y)/\sqrt{2}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}} = (4\mathbf{i}_x - \mathbf{i}_y)/\sqrt{2}$, коришћењем (11) добијамо $\theta \approx 24{,}69°$, а коришћењем (8) векторе $\mathbf{B}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{Im}}$, који су (помножени са $\sqrt{2}$) уцртани на слици. Видимо да се вектори $\sqrt{2}\mathbf{B}_{\mathrm{Re}}$ и $\sqrt{2}\mathbf{B}_{\mathrm{Im}}$ налазе на кривој коју описује врх вектора $\mathbf{A}(t)$, а пошто испуњавају услов (9), знамо да су међусобно ортогонални.



Из (8) видимо да су вектори $\mathbf{B}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{Im}}$ линеарне комбинације вектора $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$, са тежинским коефицијентима облика $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Посебно, за $|\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}| = |\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}|$, из (11) се добија $\theta = \pm\pi/4$, где знак можемо усвојити произвољно (облик криве коју описује врх вектора $\mathbf{B}(t)$ и смер његовог окретања биће исти за оба знака, $\pm$, једино ће се положај вектора $\mathbf{B}(t=0)$ разликовати).

Пример. На слици је приказана конструкција вектора $\mathbf{B}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{Im}}$, за уцртане векторе $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$ (све помножено са $\sqrt{2}$, због приказа у временском домену), за које важи $|\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}| = |\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}|$. Из (11) добијамо $\theta = \pi/4$, па из (8) следи $\mathbf{B}_{\mathrm{Re}} = (\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} - \mathbf{A}_{\mathrm{Im}})/\sqrt{2}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{Im}} = (\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} + \mathbf{A}_{\mathrm{Im}})/\sqrt{2}$. Вектори $\sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ и $\sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$ представљају суседне странице ромба, чије се дијагонале $\sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} - \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$ и $\sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Re}} + \sqrt{2}\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$ секу под правим углом, као што је познато из елементарне геометрије. Стога је за $|\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}| = |\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}|$ угао θ увек једнак $\pi/4$, независно од праваца вектора $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$. Приметимо да се вектор $\mathbf{A}(t)$ окреће у супротном смеру у односу на претходни пример.



Пошто за сваки комплексни вектор $\underline{\mathbf{A}}$, чији вектори $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$ нису ортогонални, постоји комплексни вектор $\underline{\mathbf{B}}$, чији су вектори $\mathbf{B}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{Im}}$ ортогонални, такав да врх вектора $\mathbf{B}(t)$ описује исту криву као $\mathbf{A}(t)$, облик те криве увек можемо разматрати у случају комплексно вектора код кога су $\mathbf{A}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathbf{A}_{\mathrm{Im}}$ ортогонални. Претпоставимо, зато, општи облик комплексног вектора у форми

$$\underline{\mathbf{A}} = a\,\mathbf{i}_x + \mathrm{j}b\,\mathbf{i}_y, \tag{12}$$

где су a и b реални бројеви (крива лежи у равни, па усвајамо да је то Oxy координатни систем). Овај комплексни вектор се у временском домену може приказати као

$$\mathbf{A}(t) = \sqrt{2}a\cos\omega t\,\mathbf{i}_x - \sqrt{2}b\sin\omega t\,\mathbf{i}_y = x(t)\mathbf{i}_x + y(t)\mathbf{i}_y\,, \tag{13}$$

где су $x(t)$ и $y(t)$ координате положаја вектора $\mathbf{A}(t)$. Из (13) добијамо

$$\left(\frac{x(t)}{\sqrt{2}a}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{\sqrt{2}b}\right)^2 = 1\,, \tag{14}$$

што је једначина елипсе.

Дакле, врх временски простопериодичног вектора у општем случају описује криву облика елипсе. Овакво понашање називамо **елиптичком поларизацијом**.

Ако је $a=b$, крива постаје круг, па говоримо о **кружној поларизацији**. За $a=0$ или $b=0$, врх временски простопериодичног вектора помера се дуж праве, што називамо **линијском (линеарном) поларизацијом**.

О врсти поларизације можемо да закључимо и на основу односа максималне и ефективне вредности интензитета временски простопериодичног вектора (13), $\left|\mathbf{A}(t)\right|$:

$$\left|\mathbf{A}(t)\right| = \sqrt{(\sqrt{2}a\cos\omega t)^2 + (\sqrt{2}b\sin\omega t)^2}\ . \tag{15}$$

Ефективна вредност $\left|\mathbf{A}(t)\right|$ је

$$A_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left|\mathbf{A}(t)\right|^2 \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left((\sqrt{2}a\cos\omega t)^2 + (\sqrt{2}b\sin\omega t)^2\right)\mathrm{d}t} = \sqrt{a^2+b^2}\ , \tag{16}$$

где је $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

За линијску поларизацију је $b=0$ (слично се добија ако је $a=0$), па је $\left|\mathbf{A}(t)\right|_{\max} = \sqrt{2}a$ и $A_{\mathrm{eff}} = a$, односно $\left|\mathbf{A}(t)\right|_{\max} / A_{\mathrm{eff}} = \sqrt{2}$.

За кружну поларизацију је $b=a$, па је $\left|\mathbf{A}(t)\right|_{\max} = \left|\mathbf{A}(t)\right| = \sqrt{2}a$ и $A_{\mathrm{eff}} = \sqrt{2}a$, односно $\left|\mathbf{A}(t)\right|_{\max} / A_{\mathrm{eff}} = 1$.

Ако није испуњено ни $\left|\mathbf{A}(t)\right|_{\max} / A_{\mathrm{eff}} = \sqrt{2}$, ни $\left|\mathbf{A}(t)\right|_{\max} / A_{\mathrm{eff}} = 1$, реч је о елиптичкој поларизацији.