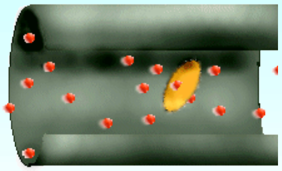
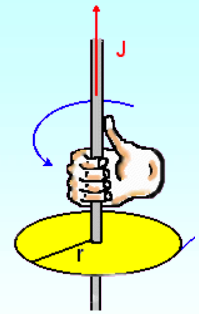
Електромагнетика

Дејан Тошић





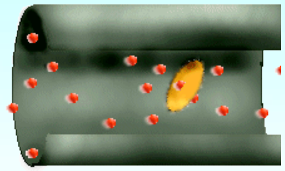
Стационарно поље

Шта је стационарно поље?

- Поље је **стационарно** (временски константно) ако се не мења у времену
- **Електростатичко поље** је посебан случај стационарног поља у коме се наелектрисања макроскопски не крећу
- У стационарном пољу може постојати усмерено кретање наелектрисања чија густина не зависи од времена

Струјно и магнетско поље

- Свако усмерено кретање наелектрисања је праћено магнетским пољем
- Стационарно струјно поље је нераскидиво повезано са стационарним магнетским пољем
- Утицај магнетског поља на расподелу струје је (обично) занемарљив (и ми ћемо га занемарити)



Стационарно поље

Стационарно **струјно** поље

Струја у проводницима

- Струја у проводницима настаје ако постоји електрично поље које обезбеђује усмерено кретање наелектрисања
- Електрично поље потиче од вишка наелектрисања које је смештено не само на површини проводника, већ и у унутрашњости проводника

Стационарно струјно поље

- **Стационарно струјно поље** је поље временски константних струја
- Анализа овог поља полази од одређивања **расподеле** струја
- Стационарно електрично поље има **исте** особине као и електростатичко, осим што у унутрашњости проводника **постоји** електрично поље

Основне једначине стационарног електричног поља

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= \rho \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0 \\ &\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho\, dv = Q_{\mathrm{u}\,S} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})}$$

Поље потиче од вишка наелектрисања које је смештено не само на површи проводника, већ и у **унутрашњости** проводника

Густина струје

Вектор густине струје

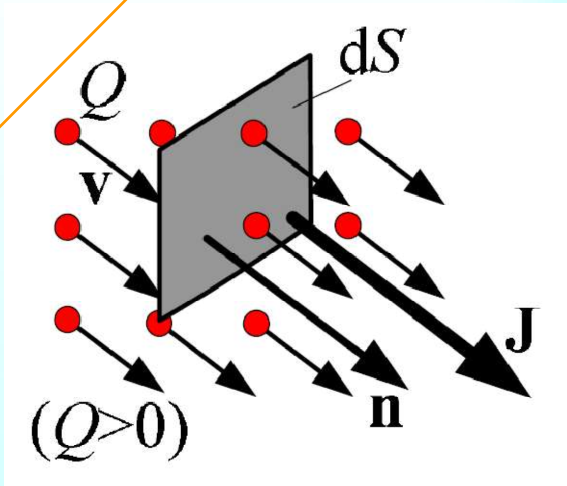
$$\mathbf{J} = NQ\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}$$

Концентрација слободних носилаца

Наелектрисање једног носиоца

Средња макроскопска брзина кретања носилаца

Запреминска густина слободних носилаца (покретних наелектрисања)



Запреминска струја је усмерено кретање слободних наелектрисања по запремини проводника

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$$|\mathbf{J}| = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}S}$$

Линеарна средина (материјал)

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}}$$

Вектор густине струје
у линеарној средини
(дрифт компонента)

Специфична проводност
линеарне средине

Вектор јачине
електричног поља
у линеарној средини

Метални проводници, јонизовани раствори и реални изолатори су практични примери линеарних материјала

Површинска струја

Вектор густине површинске струје

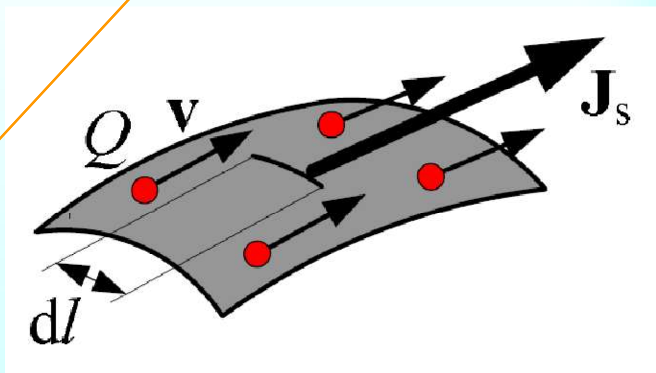
$$\mathbf{J}_\mathrm{S} = N_\mathrm{S} Q \mathbf{v} = \rho_\mathrm{S} \mathbf{v}$$

Површинска концентрација слободних носилаца

Наелектрисање једног носиоца

Макроскопска средња брзина кретања носилаца

Површинска густина слободних носилаца (покретних наелектрисања)



Површинска струја је усмерено кретање слободних наелектрисања у врло танком слоју

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad \left|\mathbf{J}_\mathrm{S}\right| = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}l}$$

Џулови губици

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{J}}}{\mathrm{d}v} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma}$$

Општи израз
(важи и у генераторима)

Запреминска густина снаге Џулових губитака у линеарној проводној средини (ван генератора)

Генератори

- На слободне носиоце, у делу простора, могу деловати силе које не потичу од вишка наелектрисања ($Q\mathbf{E}$)
- Њих зовемо **стране силе** и то могу бити хемијске или механичке силе, али и магнетска сила
- Стране силе делују у **генераторима** (побуда, примарни извор)

Побудне струје и побудно поље

- Страна сила се може представити као производ јединичног наелектрисања и вектора који се зове **вектор побудног (страног) електричног поља**
- **Побудне струје** су струје које постоје у делу простора и независне су од јачине електричног поља

Вектор побудног поља и побудних струја

$$\mathbf{F}_\mathrm{i} = Q\mathbf{E}_\mathrm{i}$$

Побудно поље

Страна сила

$$\mathbf{J}_\mathrm{i}$$

Побудна струја

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_\mathrm{i}$$

Једначина у (струјном) генератору за линеарну средину

$$\mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_\mathrm{i}\right)$$

Једначина у (напонском) генератору за линеарну средину

Јачина струје

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Јачина струје кроз површ

Оријентисана површ

Једначина континуитета

$$i = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\mathrm{d}q_\mathrm{S}/\mathrm{d}t$$

Затворена површ

Укупно наелектрисање обухваћено површи

$$q_\mathrm{S} = \int_v \rho \mathrm{d}v$$

Домен обухваћен површи *S*

Диференцијални облик једначине континуитета

$$i = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\mathrm{d}q_S / \mathrm{d}t$$

$$q_S = \int_v \rho \mathrm{d}v$$

$$\int_v \mathrm{div}\, \mathbf{a}\, \mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\, \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t}$$

Теорема Гауса и Остроградског

Једначина континуитета за стационарно поље

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$$

Једначина материјала (конститутивна једначина)

Строго говорећи, магнетско поље утиче на расподелу струје (Холов ефекат), али је овај утицај под уобичајеним околностима и у класичним проводницима веома мали, па је густина струје практично само функција електричног (а не и магнетског) поља

Анализа стационарног поља

- Прво се одређује расподела струја стационарног поља, под претпоставком да магнетско поље нема утицаја, решавањем основних једначина стационарних струја
- На основу одређене расподеле струја рачуна се стационарно магнетско поље

Основне једначине стационарног струјног поља

$$\boxed{\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = 0}$$

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\ \mathbf{J} = 0}$$

$$\boxed{\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$$

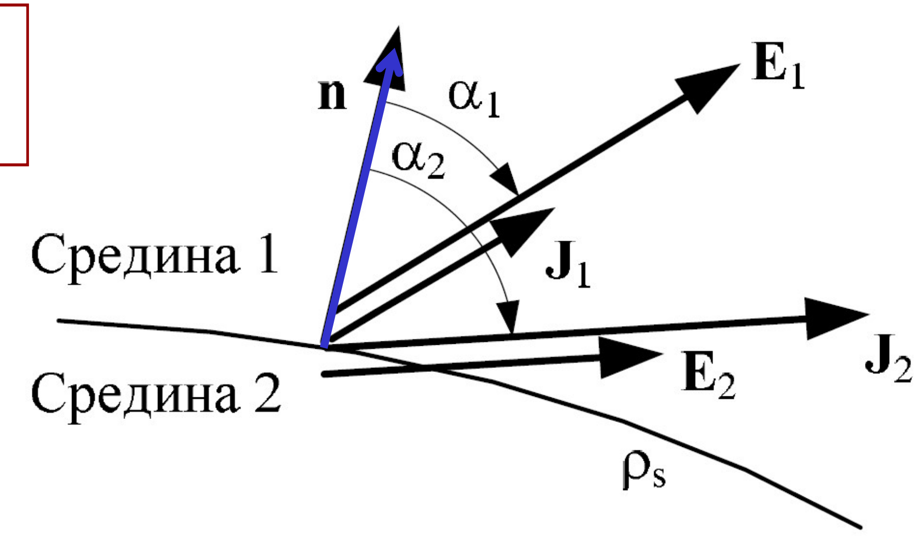
У присуству побудног поља: $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_\mathrm{i})$

У присуству побудних струја: $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_\mathrm{i}$

У одсуству побуде решење је тривијално: $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{J} = 0$

Гранични услови

$$\boxed{\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_2=-\partial\rho_s/\partial t}$$



$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_2=0$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_1-\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2=0$$

Из једначине континуитета изводи се гранични услов под претпоставком да на површи нема површинских струја

$$\frac{\mathrm{tg}\ \alpha_1}{\mathrm{tg}\ \alpha_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Правило преламања струјница на раздвојној површи две линеарне средине у стационарном пољу

Расподела наелектрисања у стационарном пољу

Посматрајмо линеаран нехомоген проводник

$$\rho = \operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\mathbf{J}\right) = \mathbf{J}\cdot\operatorname{grad}\frac{\varepsilon}{\sigma} + \frac{\varepsilon}{\sigma}\operatorname{div}\mathbf{J} = \mathbf{J}\cdot\operatorname{grad}\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$\rho_s = \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_1 - \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_1 - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_2 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_1$$

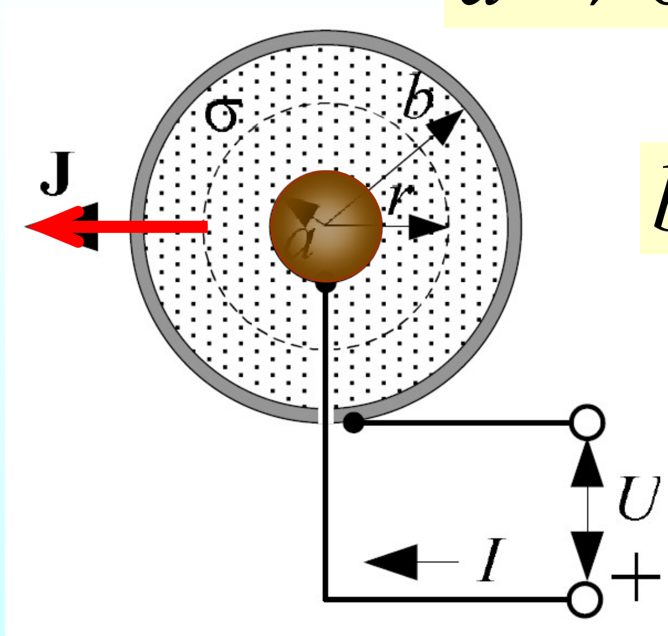
Расподела слободних наелектрисања је условљена расподелом струје. У проводнику, у општем случају, постоји запремински расподељено слободно наелектрисање.

Тачкасти струјни извор

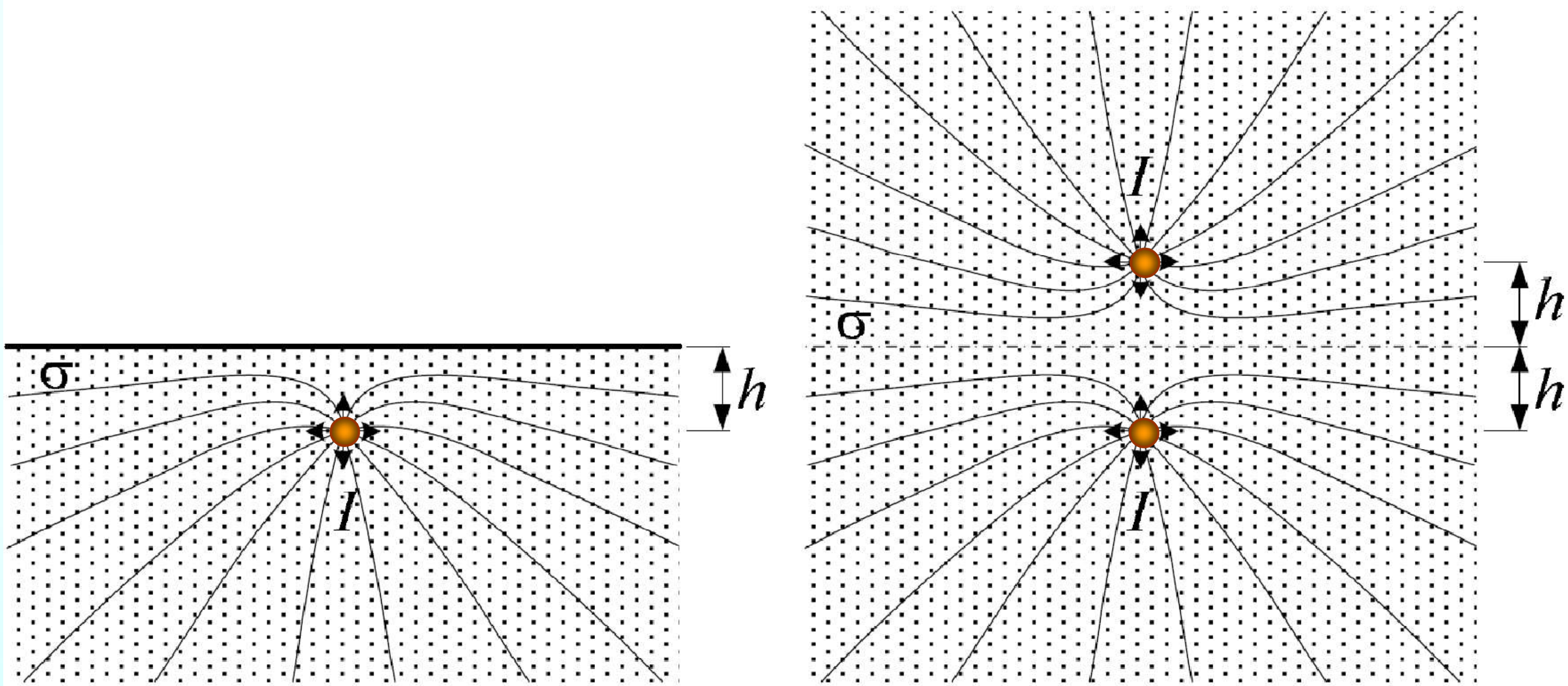
$$J = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$a \to 0$$

$$b \to \infty$$



Теорема ликова

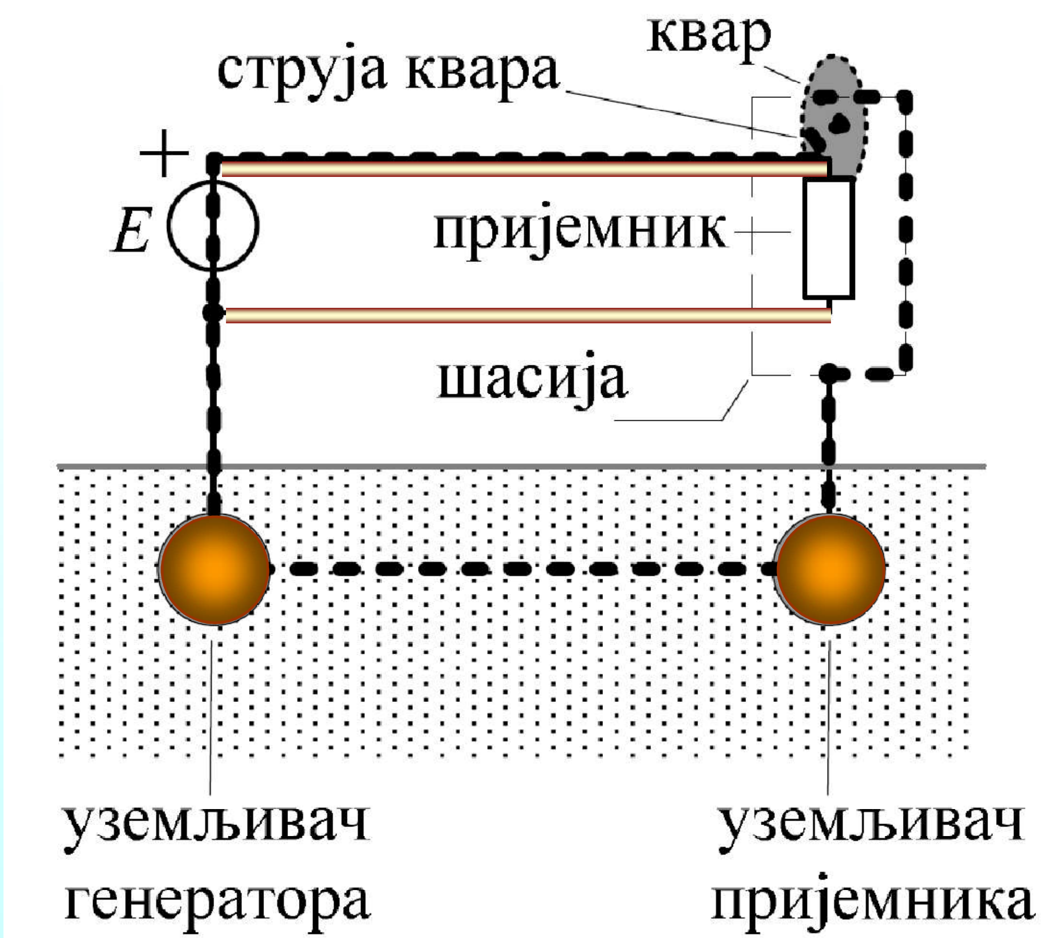


Било какав струјни извор који се налази у проводном полу-простору у близини равне раздвојне површи са непроводном средином еквивалентан је том извору и његовом позитивном лику, који се налази у бесконачној проводној средини.

Уземљивачи

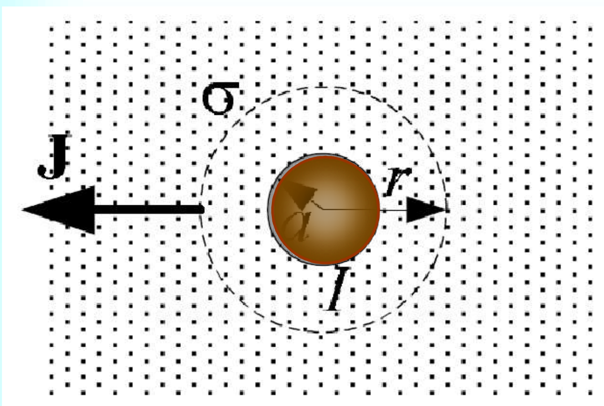
- **Уземљивач** је систем проводника закопаних у проводну земљу који има један проводник за везу са уређајима који су изнад површи земље
- Одводе нагомилано наелектрисање
- Изједначавају потенцијале уређаја са околним проводним предметима

Пример везивања уземљивача

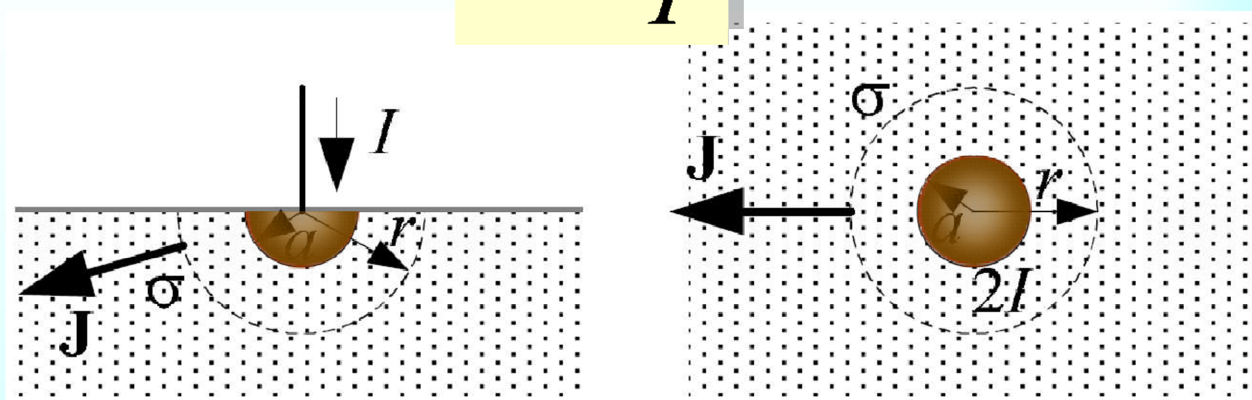


Отпорност уземљивача

$$R = \frac{V}{I}$$

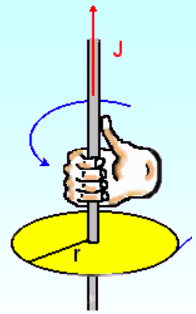


Лоптасти уземљивач



Полулоптасти уземљивач и његов еквивалент

Отпорност уземљивача је количник потенцијала уземљивача у односу на удаљене тачке и струје уземљивача



Стационарно поље

Стационарно **магнетско** поље

Шта је магнетско поље

- Магнетско поље је посебно физичко стање простора у околини покретних наелектрисања, дакле и у околини простора у коме постоје струје
- У случају стационарних струја, и магнетско поље које их прати је стационарно

Магнетска сила

$$\boxed{\mathbf{F}_\mathrm{m} = Q_\mathrm{p}\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}}$$

Вектор магнетске индукције

Брзина наелектрисане честице

Магнетска сила

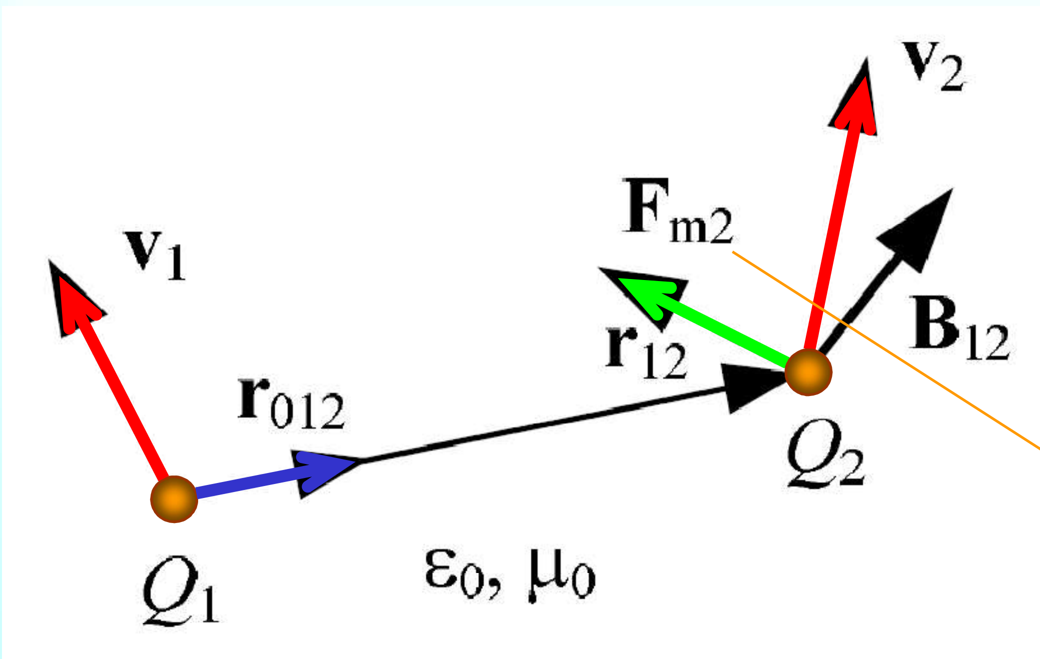
Укупна сила која делује на наелектрисану честицу је збир магнетске и електричне силе (**Лоренцова сила**)

Сматрамо да магнетско поље практично **не утиче** на расподелу стационарних струја и да је расподела тих струја **позната**

Био-Саваров закон

$$\boxed{\mathbf{F}_{m2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q_2\mathbf{v}_2 \times \left(Q_1\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{012}\right)}{r^2}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$



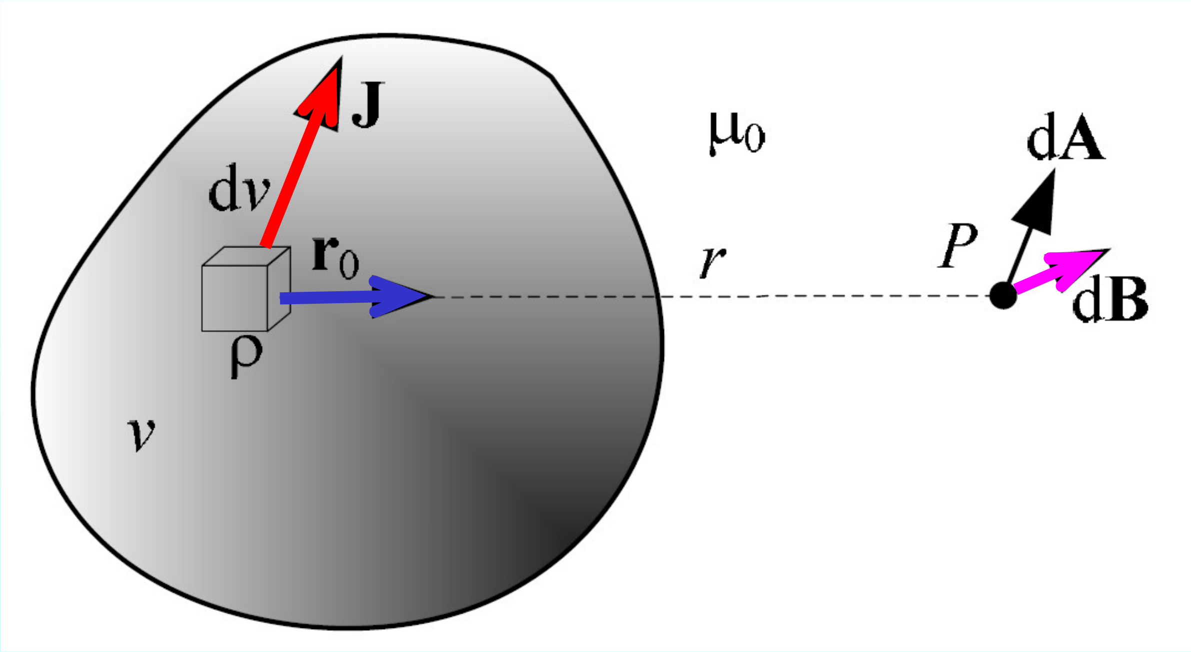
Био-Саваров закон следи из резултата огледа

Магнетска сила

Вектор магнетске индукције

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0}{r^2}$$

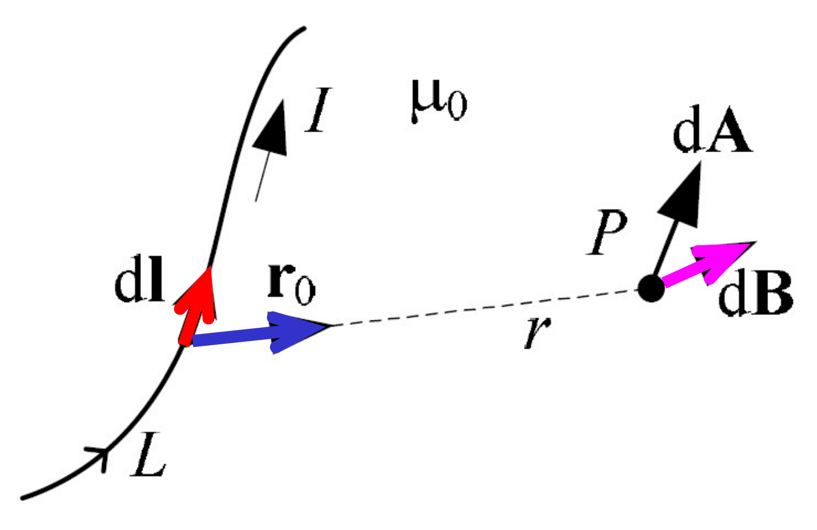
$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{(\mathbf{J}\,\mathrm{d}v) \times \mathbf{r}_0}{r^2}}$$



Вектор **B** површинских и линијских струја

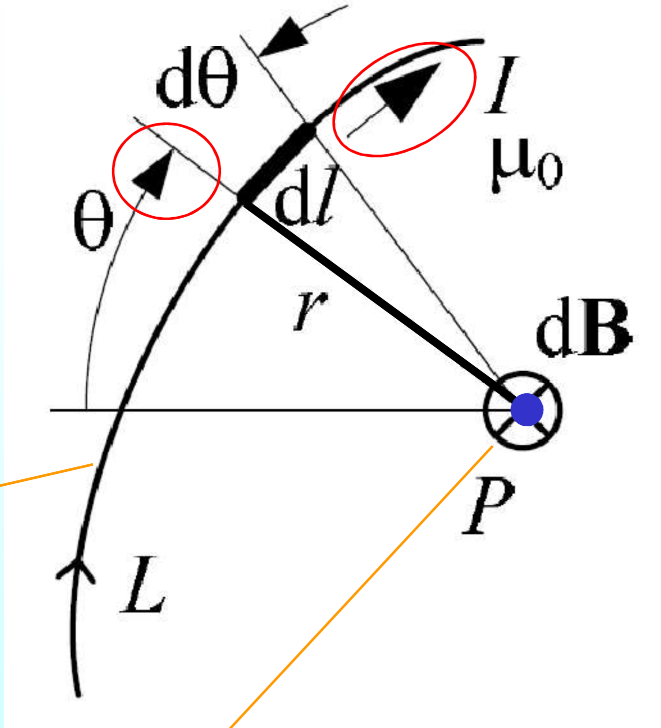
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\left(\mathbf{J}_\mathrm{s}\mathrm{d}S\right)\times\mathbf{r}_0}{r^2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{\left(I\mathrm{d}\mathbf{l}\right)\times\mathbf{r}_0}{r^2}$$



Вектор **B** планарне контуре (копланарног система)

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\,\mathrm{d}\theta}{r}}$$



Контура са струјом је у равни цртежа

Вектор магнетске индукције је нормалан на раван цртежа

Магнетски вектор-потенцијал

Магнетска индукција се може извести из помоћне векторске функције која се назива **магнетски вектор-потенцијал**

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\mathbf{v}}{r}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{J}_s \mathrm{d}S}{r}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}\mathrm{d}v}{r}}$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}}{r}$$

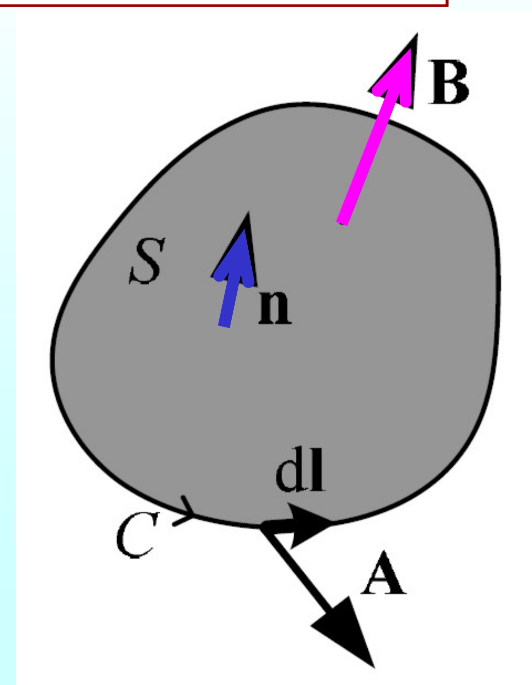
Магнетски флукс

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}$$

$$\int_S \mathrm{rot}\ \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

$$\boxed{\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \Phi}$$

Стоксова теорема



Основне једначине магнетског поља у вакууму

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0}$$

$$\boxed{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}}$$

$$\boxed{\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}$$

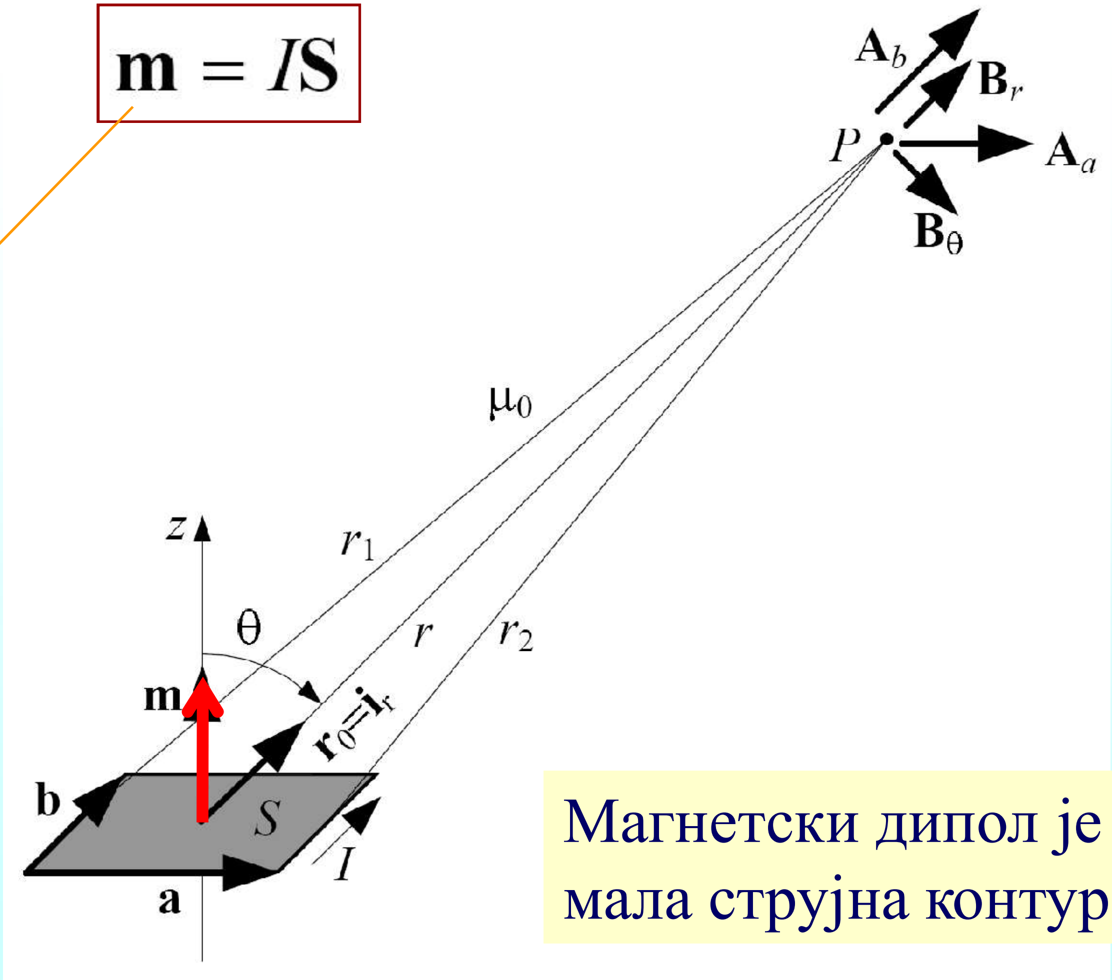
$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} \end{array}\right\} \quad \boxed{\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}}$$

Магнетски дипол

$$\mathbf{S} = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\boxed{\mathbf{m} = I\mathbf{S}}$$

Магнетски момент струјне контуре



Магнетски дипол је мала струјна контура

Феромагнетици

- Већина материјала (**парамагнетски** и **дијамагнетски** материјали) својим присуством практично **не утичу** на магнетско поље
- Парамагнетици и дијамагнетици су **немагнетски материјали** и описују се пермеабилности вакуума $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$
- **Феромагнетски** материјали (гвожђе, ферити, ...) знатно утичу на магнетско поље

Модел феромагнетика

- Сваки молекул феромагнетика се понаша као **мала струјна контура**, што је последица некомпензованог спина електрона
- У магнетском пољу, на струјне контурице делује спрег магнетских сила под чијим се дејством контурице делимично или потпуно **оријентишу**

Утицај феромагнетика

- Струјне контурице стварају своје магнетско поље које **модификује** поље у коме се материјал налази
- Феромагнетик се **намагнетише**
- Намагнетисан феромагнетски материјал се, у погледу утицаја на магнетско поље (**B**), може **заменити струјним контурицама** смештеним у вакууму

Вектор магнетизације

Вектор магнетизације

Магнетски моменат струјне контурице

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}}{\Delta v}$$

Физички мала запремина

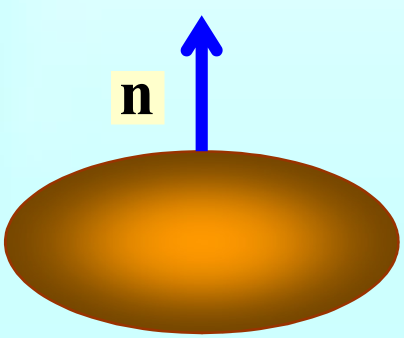
Намагнетисани материјал се може заменити, у погледу стварања магнетске индукције, запремински и површински расподељеним струјама у вакууму
Те струје се називају **Амперове струје**

Амперове струје

$$I_{\mathrm{A}} = \oint_C \mathbf{M} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \qquad I_{\mathrm{A}} = \int_S \mathbf{J}_{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Руб површи ***S***

$$\boxed{\mathbf{J}_{s\mathrm{A}} = -\mathbf{n} \times \mathbf{M}} \qquad \boxed{\mathbf{J}_{\mathrm{A}} = \mathrm{rot}\,\mathbf{M}}$$



Вектор нормале на тело
усмерен ка споља (упоље)

Вектор јачине магнетског поља

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{J} + \mathbf{J}_A\right)$$

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{J} + \mathbf{J}_A\right)\cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right) = \mathbf{J}$$

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}}$$

Уопштени Амперов закон

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}}$$

$$\boxed{\oint_C \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}$$

Једначине материјала – конститутивне релације

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B}) \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

Феромагнетски материјали су **нелинеарни** и поседују мање или више изражене особине **хистерезиса.** Њихова карактеризација укључује **вишезначност** и **историју** магнетизације

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_r\mu_0\mathbf{H}$$

Линеарни материјал

Основне једначине стационарног магнетског поља

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}}$$

$$\boxed{\oint_C \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0}$$

$$\boxed{\oint_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0}$$

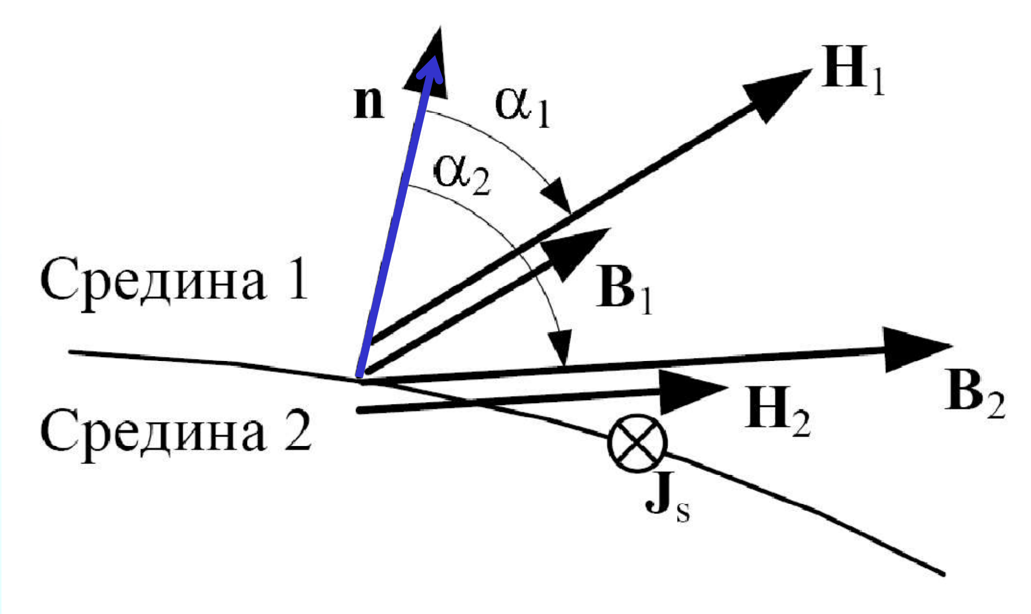
$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})}$$

Анализа стационарног магнетског поља у феромагнетским материјалима полази од **познате расподеле струје** и своди се на решавање основних једначина

Гранични услови

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 = 0$$

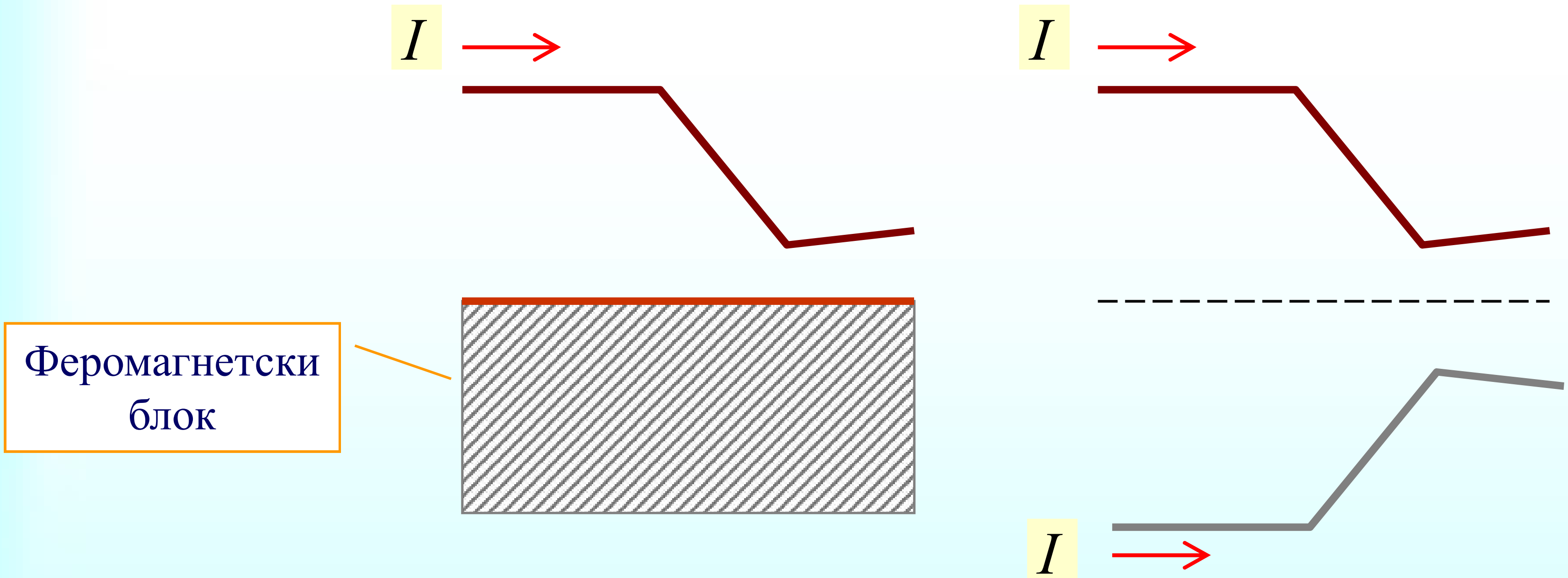


$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

„Закон“ преламања – линеарни материјали

Гранични услови су локалне везе вектора поља у блиским тачкама са различитих страна раздвојне површи, а добијају се из интегралних једначина постављених за физички малу област

Теорема ликова



Систем који се састоји од проводника постављеног изнад феромагнетског материјала еквивалентан је систему који се састоји од проводника и његовог позитивног лика

Стационарно поље

Примена стационарног поља:
струјног и магнетског

Струјно поље

- Уземљивачи:
  Заштита инсталација у електроенергетици
- Геологија:
  Испитивање тла пољем сталних струја
  Утврђивање састава земљишта
- Медицина:
  Проводност коже

Магнетско поље (1)

- Компас
- НМР (Нуклеарна Магнетска Резонанца)
- Магнетска левитација
- Магнетрон: произвођење брзопроменљивог ЕМ поља
- Рачунарски хард диск, складиштење података без напајања

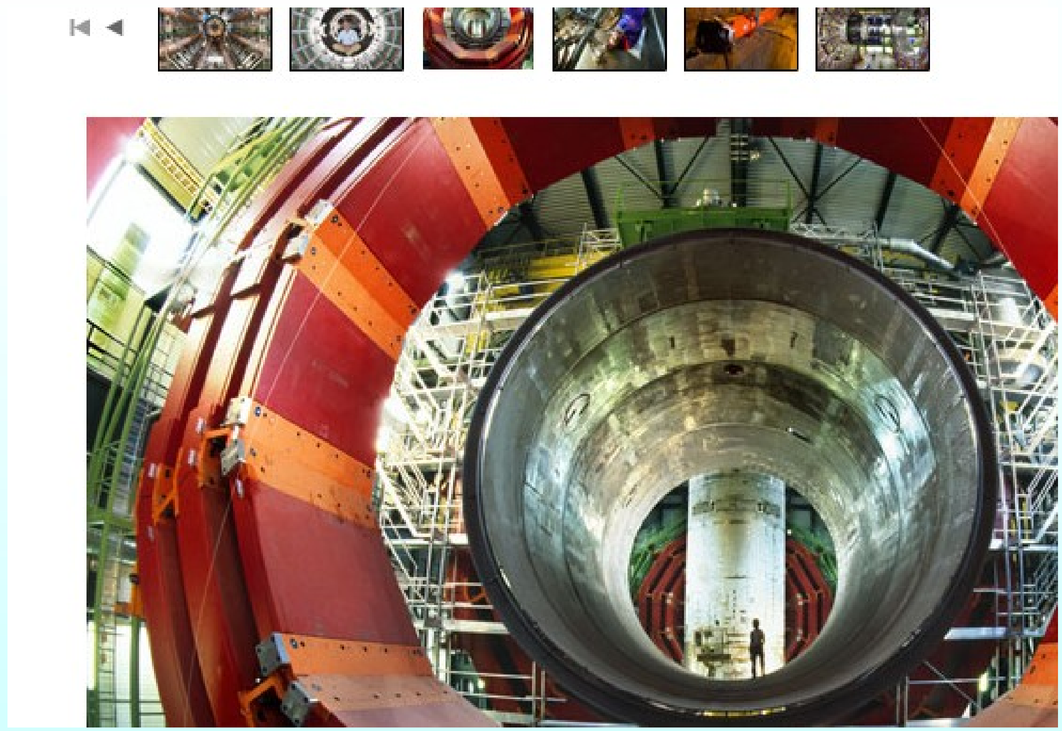
Магнетско поље (2)

- Придржавање и учвршћивање (вратанца намештаја, играчака)
- Електромагнетска дизалица: подизање и премештање кабастог терета
- Алати: намагнетисање одвијача, матица
- Мерна, лабораторијска опрема
- Холов ефекат: мерење брзине протока течности

Магнетско поље (3)

- Акцелератори (убрзавачи) честица

Електромагнет циклотрона „Винси“ (Институт Винча)



Електромагнет детектора миона великог хадронског колајдера (највећи електромагнет на свету, CERN)

наставиће се...