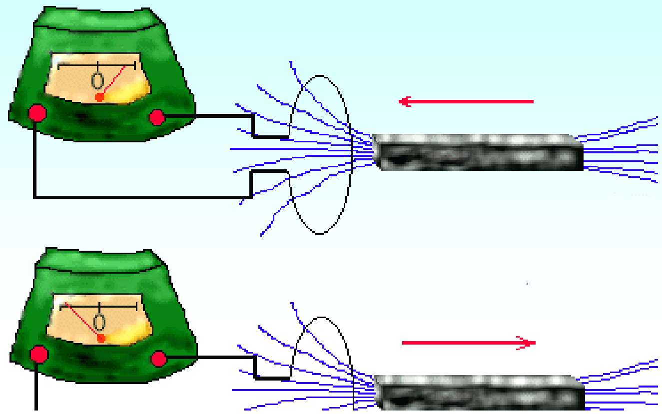
Електромагнетика

Дејан Тошић



Квазистационарно поље

Шта је квазистационарно поље?

- Поље је **квазистационарно** ако су промене извора поља довољно споре да се појава кашњења може занемарити
- Временске промене извора поља се одражавају практично **истовремено** на промену поља
- Могуће само у домену коначних димензија
- Занемарује се коначна брзина простирања ЕМ поља

Простопериодично поље

- Ако се струје и наелектрисања мењају у времену као простопериодичне функције, поље је простопериодично
- Ако је учестаност промене мала, поље ће бити квазистационарно
- У којој области се поље може сматрати квазистационарним?

Пример процене области

- Нека је поље простопериодично учестаности **1 MHz**
- Таласна дужина у вакууму је око **300 m**
- У области чија је највећа димензија бар десетак пута мања од таласне дужине (око **30 m**) поље се може сматрати квазистационарним

$$\lambda = c_0 / f \approx 300 \text{ m}$$

$$c_0 \approx 300 \text{ Mm/s}$$

Индуковано поље

- **Индуковано електрично поље** услед временски промењивог магнетског поља је **нови квалитет** квазистационарног поља у односу на стационарно поље
- **Индуковано магнетско поље** услед промењивог електричног поља такође постоји, али је **занемарљиво**

Темељни експеримент

$$\mathbf{E}_{\mathrm{ind}}(t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}{r}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\mathbf{v}}{r}$$

Индуковано електрично поље

$$\boxed{\mathbf{E}_{\mathrm{ind}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}$$

Наелектрисана честица која се креће у вакууму временски промењљивом брзином индукује електрично поље које се суперпонира са пољем услед вишка наелектрисања

Индуковано поље у вакууму

На основу својства линеарности (суперпозиције) вакуума, добија се израз за индуковано електрично поље запремински, површински и линијски расподељених струја у вакууму (општије, у немагнетском материјалу)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}\,\mathrm{d}v}{r}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\mathbf{J}_\mathrm{s}\,\mathrm{d}S}{r}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\,\mathrm{d}\mathbf{l}}{r}$$

Индуковано електрично поље постоји кад год постоје временски променљиве струје, односно када постоје наелектрисања која се убрзано крећу

Компонента услед наелектрисања

$$\mathbf{E}_{\mathrm{q}}(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{v}\frac{\rho(t)\,\mathrm{d}v}{r^2}\mathbf{r}_0$$

У квазистационарном пољу, поред индукованог електричног поља, постоји компонента која потиче од вишка наелектрисања. Она се рачуна као у електростатици, само што је расподела наелектрисања функција времена.

Магнетска индукција

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{(\mathbf{J}(t)\mathrm{d}v) \times \mathbf{r}_0}{r^2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathrm{t}) = 0$$

$$\mathbf{B}(t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(t)$$

Магнетска индукција се рачуна на исти начин као у стационарном пољу, само што се струје мењају у времену, а синхроно са њима и магнетско поље

Уопштени Амперов закон

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{H}(t)=\mathbf{J}(t)}$$

У магнетском материјалу вектор магнетизације је временски променљив, а за вектор јачине магнетског поља **приближно** важи уопштени Амперов закон

Основна својства

- Индуковано електрично поље се јавља кад год постоји временски промењљиво магнетско поље
- Квазистационарно електрично поље се мења синхроно са променом извора поља
- Квазистационарно електрично поље је збир поља услед наелектрисања и индукованог поља

Укупно електрично поље

Укупно електрично поље (не рачунајући побудно поље)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{q}} + \mathbf{E}_{\mathrm{ind}}$$

Индуковано електрично поље

Електрично поље услед вишка наелектрисања

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_{\mathrm{q}}(t) = 0$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{q}}(t) = -\mathrm{grad}\,V(t)$$

$$V(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho(t)\,\mathrm{d}v}{r}$$

Уопштени Гаусов закон

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(t) = \rho(t)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{\mathrm{q}}(t) = \frac{\rho(t)}{\varepsilon_0}$$

Поље у вакууму

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{div} \mathbf{E}_{\mathrm{ind}} = 0$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho}$$

Фарадејев закон

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = \text{rot}\left(\mathbf{E}_\text{q} + \mathbf{E}_\text{ind}\right) = \text{rot}\,\mathbf{E}_\text{q} + \text{rot}\,\mathbf{E}_\text{ind} = 0 - \text{rot}\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \text{t}}$$

$$\mathbf{B}(t) = \text{rot}\,\mathbf{A}(t)$$

$$\text{rot}\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\boxed{\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

Диференцијални облик Фарадејевог закона електромагнетске индукције

Интегрални и општи облик Фарадејевог закона

Индукована електромоторна сила у контури

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}S$$

Интегрални облик

$$e_{\mathrm{ind}}(t) = \oint_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E}_{\mathrm{ind}}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

$$e_{\mathrm{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Општи облик
укључује и динамичку индукцију

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Статичка и динамичка индукција

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}$$

Индукована емс статичке индукције

Индукована емс динамичке индукције

Магнетски флукс кроз жичану контуру се може мењати зато што се магнетска индукција мења у времену или зато што се контура креће или деформише

Веза ел. поља и потенцијала

$$\mathbf{E}_{\mathrm{ind}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{q}} + \mathbf{E}_{\mathrm{ind}}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{q}}(t) = -\mathrm{grad}\, V(t)$$

$$\boxed{\mathbf{E}(t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\, V(t)}$$

Потенцијали су одређени са **4 скаларне компоненте**: 1 за електрични скалар-потенцијал и 3 за магнетски вектор-потенцијал, тако да се вектори **E** и **B** (укупно 6 скаларних компоненти) могу одредити из 4 скаларне компоненте

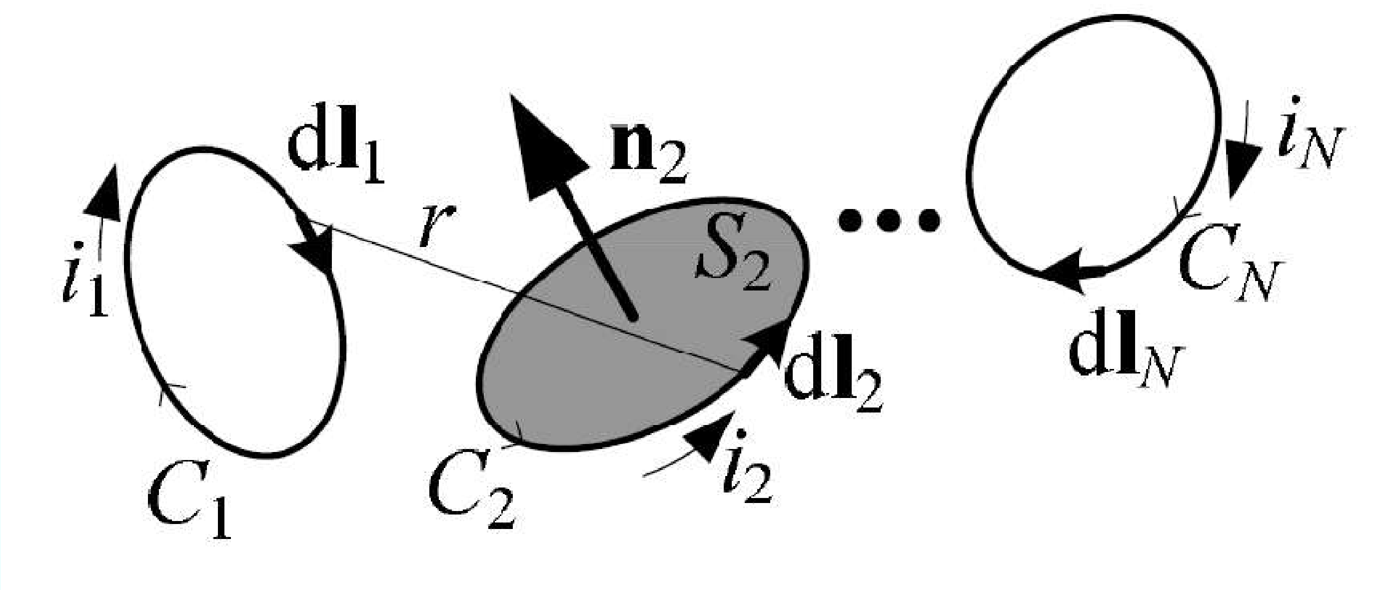
Напон у квазистационарном пољу

- Усвојићемо по дефиницији:
  Напон је разлика скалар-потенцијала
- То је исто што и циркулација компоненте електричног поља услед наелектрисања ($\mathbf{E}_q$)
- Напон се може равноправно дефинисати и као циркулација укупног поља

Квазистационарно поље

Индуктивности

Систем жичаних контура



Посматра се систем танких жичаних контура у линеарној средини. Струје контура су временски промењиве. Јачина струје је константна дуж контуре.

Индуктивност

$$e_{\mathrm{ind}kj} = -\mathrm{d}\Phi_{kj}/\mathrm{d}t = -\int\limits_{S_k} \frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_k = -\oint\limits_{C_k} \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_k$$

Индукована емс у контури ***k*** услед струје у контури ***j***

$$e_{\mathrm{ind}kj} = -L_{kj} \frac{\mathrm{d}i_j}{\mathrm{d}t}$$

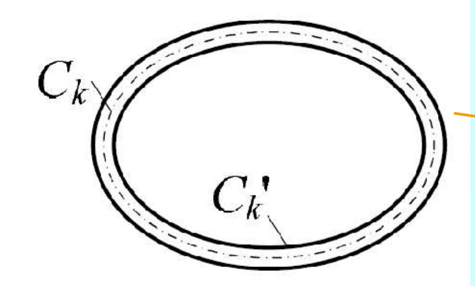
Међусобна индуктивност контура ***k*** и ***j***

Нојманов образац

$$L_{kj} = \frac{\Phi_{kj}}{i_j} = \frac{1}{i_j} \int_{S_k} \mathbf{B}_j \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_k = \frac{1}{i_j} \oint_{C_k} \mathbf{A}_j \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_k$$

$$\boxed{L_{kj} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_j} \oint_{C_k} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}_k \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_j}{r}}$$

$$L_{kj} = L_{jk}$$



Контуре интеграције за рачунање самоиндуктивности

Укупна емс контуре

$$e_{\mathrm{ind}k} = -\sum_{j=1}^{N} L_{kj} \frac{\mathrm{d}i_j}{\mathrm{d}t}, \quad k = 1,\ldots,N$$

Квазистационарно поље

Енергија магнетског поља

Магнетска енергија

$$\boxed{W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} i_j \Phi_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} L_{jk} i_j i_k}$$

Енергија магнетског поља (магнетска енергија) система спрегнутих контура које се налазе у линеарној средини – локализована је у магнетском пољу контура

Густина магнетске енергије

$$\mathrm{d}W_\mathrm{m} = \int_v \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{B}\,\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}w_\mathrm{m} = \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{B}$$

$$\boxed{w_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{2}|\mathbf{H}||\mathbf{B}| = \frac{1}{2}\mu|\mathbf{H}|^2 = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu}}$$

$$W_\mathrm{m} = \int_v w_\mathrm{m}\mathrm{d}v$$

Основне једначине квазистационарног ЕМ поља

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \xrightarrow{\text{div}} \boxed{\operatorname{div}\mathbf{J} = 0} \ ?$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

Видећемо да су ове једначине контрадикторне и да представљају само апроксимацију када се извори поља мењају споро

Квазистационарно поље

Примена квазистационарног поља

Електроенергетски системи

- Производење електричне енергије: електране, електрогенератори, агрегати
- Пренос електричне енергије: далеководи, трансформаторске станице
- Расподела електричне енергије: градска електродистрибуција
- Потрошња електричне енергије (мотори)

Откривање металних предмета

- Системи за упозоравање присуства или крађе металних предмета (аларм)
- Регулација саобраћаја (откривање присуства возила на раскрсници)
- Бројање возила (пролазак кроз циљ) постављањем проводне контуре у путну конструкцију (коловоз)

Остале примене

- Електронски кључеви
- Магнетске картице
- Моделовање, анализа, и пројектовање електричних кола
- Електромагнетске дизалице
- Зујалице
- Релејни системи

наставиће се...