Електромагнетика

Дејан Тошић

Брзопроменљиво поље

Неконзистентност једначина квазистационарног поља

Основне једначине квазистационарног ЕМ поља

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} \xrightarrow{\mathrm{div}} \boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{J} = 0}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$$

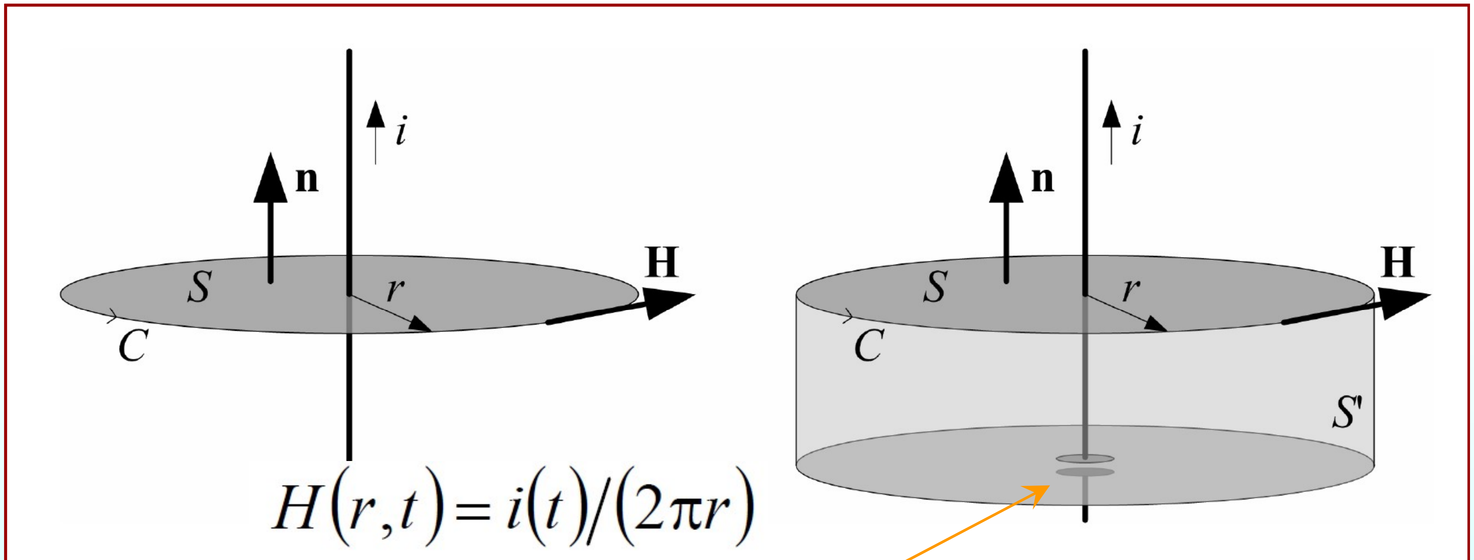
$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$$

што је у **супротности** са раније изведеном једначином континуитета!

$$\boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t}$$

Једначине квазистационарног поља су **неконзистентне**!

Илустрација контрадикторности Амперовог закона



Мали плочасти кондензатор велике капацитивности

Ако површ ***S'*** пролази између електрода кондензатора следи да је магнетско поље једнако **нули**!

Превазилажење

$$\cancel{\operatorname{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}$$

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Густина струје електричног помераја

Максвелове једначине

Потпуни систем Максвелових једначина

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Фарадејев закон
1. Максвелова једначина

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Допуњени уопштени Амперов закон
2. Максвелова једначина

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$$

Уопштени Гаусов закон
3. Максвелова једначина

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$$

Закон о конзервацији магнетског флукса
4. Максвелова једначина

Конститутивне једначине

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

Потпуни систем једначина за анализу временски променљивих поља

Извори поља

- Из 1. Максвелове једначине следи да промена магнетске индукције у времену представља извор вртложног (индукованог) електричног поља
- Из 2. Максвелове једначине следи да кондукциона струја и струја електричног помераја представљају извор вртложног (индукованог) магнетског поља

Индуковано поље

- Временски промењиво магнетско поље индукује електрично поље
- Временски промењиво
  електрично поље
  индукује магнетско поље
- У анализи брзопромењивог поља обе појаве се морају узети у обзир

Потенцијали

Магнетски вектор-потенцијал

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \;\Rightarrow\; \operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V}$$

Електрични скалар-потенцијал

Надаље ћемо сматрати да је средина линеарна и хомогена, параметара ε и μ

Једначине потенцијала

$$\left.\begin{matrix} \operatorname{div}\mathbf{D}=\rho \qquad \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}V \end{matrix}\right\} \quad \boxed{\Delta V+\operatorname{div}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

$$\Delta V=\operatorname{div}\operatorname{grad}V$$

$$\underbrace{\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \qquad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}}$$

$$\boxed{\Delta\mathbf{A}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}+\varepsilon\mu\operatorname{grad}\frac{\partial V}{\partial t}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}}$$

Лоренцови потенцијали

$$\Delta V + \mathrm{div}\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \varepsilon\mu\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial V}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Ове две једначине добијају исти облик ако се усвоји **Лоренцов услов**

$$\boxed{\mathrm{div}\,\mathbf{A} = -\varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}}$$

Решења за потенцијале

$$\left.\begin{aligned}\Delta V-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}&=-\frac{\rho}{\varepsilon}\\ \Delta\mathbf{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}&=-\mu\mathbf{J}\end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{V(t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v\frac{\rho(t-r/c)\,\mathrm{d}v}{r}}$$

$$\boxed{\mathbf{A}(t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_v\frac{\mathbf{J}(t-r/c)\,\mathrm{d}v}{r}}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=-\varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Брзина простирања

Закаснели потенцијали

- Потенцијали одређени под Лоренцовим условом зову се **закаснели потенцијали** (ретардирани потенцијали)
- Промене извора (наелектрисања и струја) у времену доводе до одговарајућих промена потенцијала али са **кашњењем**
- Кашњење је време простирања промене

$$\tau = \frac{r}{c}$$

Брзина простирања

- **Брзина простирања** (***c***) је брзина којом се промена (пертурбација) извора преноси (простире) до тачке у којој се рачунају потенцијали
- Брзина простирања у вакууму је

$$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

$$c_0 = 299.792.458\ \mathrm{m/s}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2}$$

Максвелове једначине у интегралном облику

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_v \rho \, \mathrm{d}v$$

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

Конститутивне једначине

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

Једначина континуитета

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}v$$

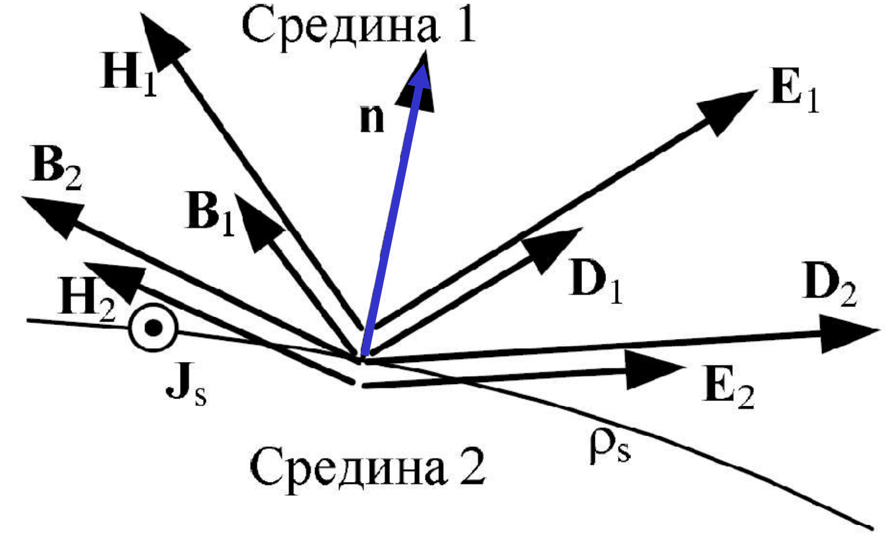
Гранични услови

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_1-\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2=0$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1-\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2=\mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_2=\rho_s$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_2=0$$



$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_2=-\frac{\partial\rho_s}{\partial t}$$

ако на раздвојној површи **нема** површинских струја

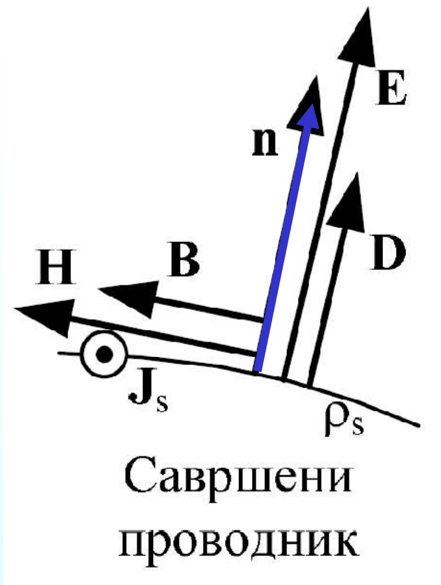
Случај савршеног проводника

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_S$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_S$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$$



Све компоненте временски **промењивог** поља су у средини 2 (савршен проводник) једнаке нули

А шта ако је магнетско поље временски константно?

Комплексни вектори

Простопериодично ЕМ поље, поларизација простопериодичног вектора, комплексне једначине поља

Односи се и на брзопромењиво и на спoропромењиво поље

Простопериодичан скалар

$$\boxed{u(t) = U\sqrt{2}\,\cos\left(\omega t + \theta\right)}$$

$u(t)$ тренутна вредност

U ефективна вредност

$\omega t + \theta$ тренутна фаза

ω кружна (угаона) учестаност

θ почетна фаза

$\omega = 2\pi f$

$f = 1/T$ учестаност

$U_{\mathrm{m}} = U\sqrt{2}$ амплитуда

Простопериодичан вектор

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \mathbf{i}_x a_x(t) + \mathbf{i}_y a_y(t) + \mathbf{i}_z a_z(t)}$$

$$a_x(t) = A_x\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \theta_x\right)$$

$$a_y(t) = A_y\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \theta_y\right)$$

$$a_z(t) = A_z\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \theta_z\right)$$

$$\left|\mathbf{a}(t)\right| = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2 + a_z(t)^2}$$

Ефективна вредност вектора

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(a_x(t)^2 + a_y(t)^2 + a_z(t)^2\right)\mathrm{d}t}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

у општем случају $A_\mathrm{m} \neq A\sqrt{2}$!

Поларизација

- Врх простопериодичног вектора у општем случају описује **елипсу**, па се каже да је вектор (односно поље које тај вектор представља) **елиптички поларизован**
- Посебни случајеви су **кружно поларизован** и **линијски поларизован** вектор

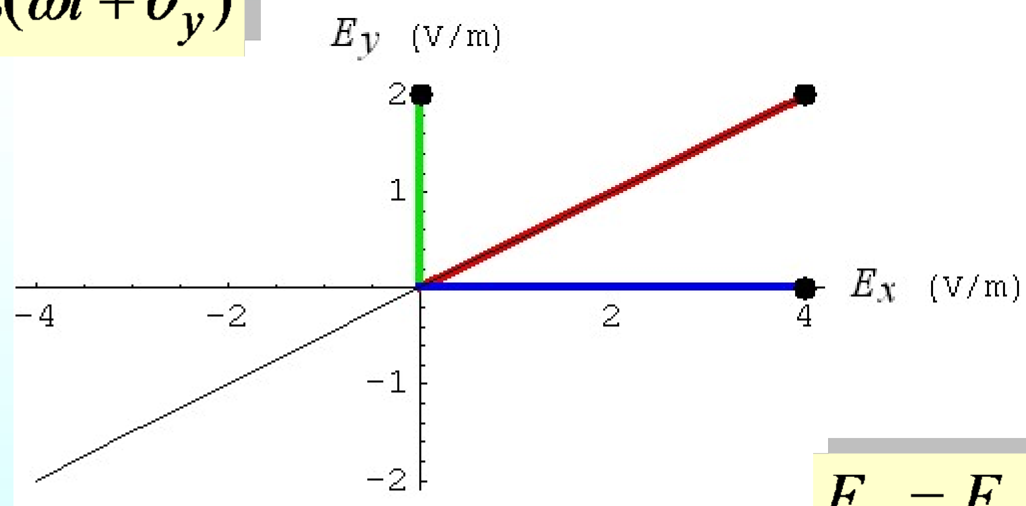
Кружна поларизација

- **Елиптички поларизован** вектор може се добити суперпозицијом два линијски поларизована вектора
- Када су линијски поларизовани вектори истих амплитуда, међусобно ортогонални у простору, и фазно померени за $\pi/2$ (у квадратури), добија се **кружно поларизован** вектор

Линијска поларизација

$$E_y = E_{y,\max}\cos(\omega t + \theta_y)$$

$$\boxed{\theta_x = \theta_y}$$



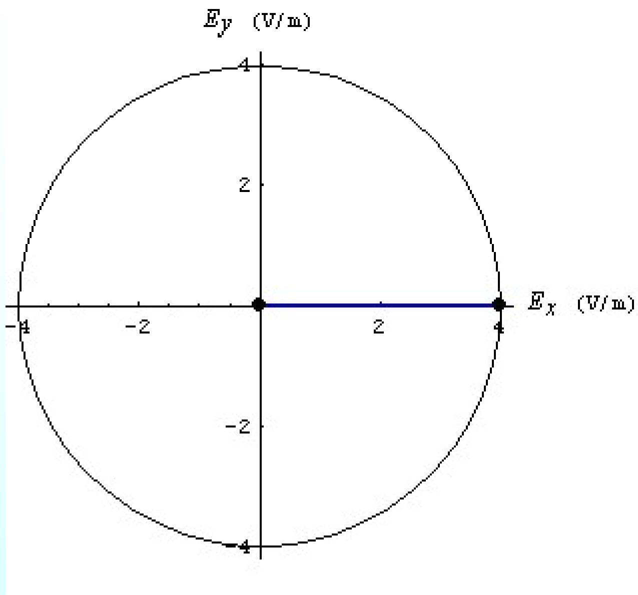
$$E_x = E_{x,\max}\cos(\omega t + \theta_x)$$

$$E_z = 0$$

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i}_x + E_y\mathbf{i}_y + E_z\mathbf{i}_z = (E_x, E_y, E_z)$$

Кружна поларизација

$$E_y = A\cos(\omega t + \theta_y)$$



$$\boxed{\left|\theta_x - \theta_y\right| = \frac{\pi}{2}}$$

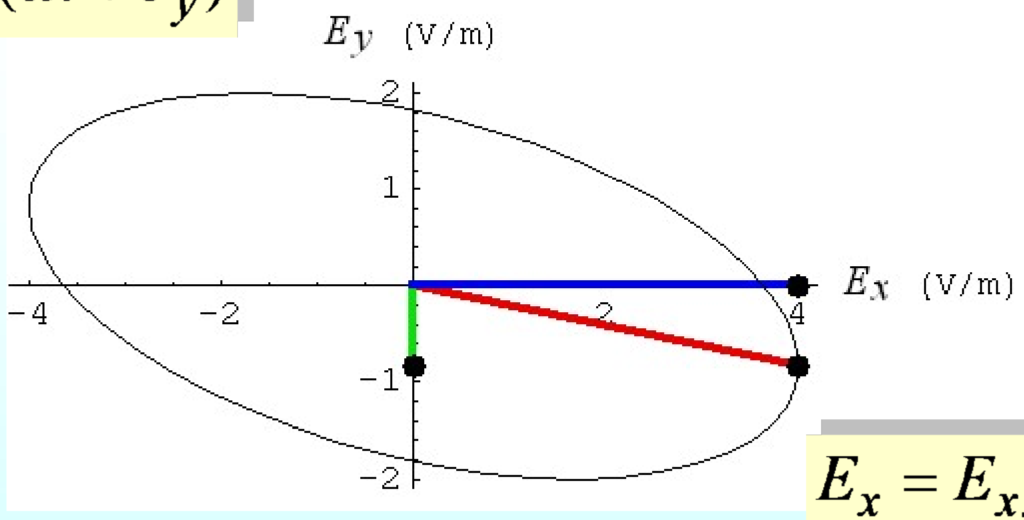
$$E_x = A\cos(\omega t + \theta_x)$$

$$E_z = 0$$

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i}_x + E_y\mathbf{i}_y + E_z\mathbf{i}_z = (E_x, E_y, E_z)$$

Елиптичка поларизација

$$E_y = E_{y,\max}\cos(\omega t + \theta_y)$$



$$E_x = E_{x,\max}\cos(\omega t + \theta_x)$$

$$E_z = 0$$

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i}_x + E_y\mathbf{i}_y + E_z\mathbf{i}_z = (E_x, E_y, E_z)$$

Комплексни представник простопериодичног вектора - комплексни вектор

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta) \rightarrow \underline{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

$$u(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{U}\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{i}_x a_x(t) + \mathbf{i}_y a_y(t) + \mathbf{i}_z a_z(t) \rightarrow \underline{\mathbf{A}} = \mathbf{i}_x \underline{A}_x + \mathbf{i}_y \underline{A}_y + \mathbf{i}_z \underline{A}_z$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\mathbf{A}}\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$$

$$\left|\underline{\mathbf{A}}\right| = \sqrt{\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^*} = A$$

Комплексне Максвелове једн.

$$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\mu\,\underline{\mathbf{H}}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\,\underline{\mathbf{E}}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{D}} = \underline{\rho}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{B}} = 0$$

$$\underline{\mathbf{J}} = \sigma\left(\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}\right)$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon\underline{\mathbf{E}}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \mu\underline{\mathbf{H}}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{J}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\rho}$$

Потпун систем комплексних Максвелових једначина у диференцијалном облику

Комплексни потенцијали

$$\underline{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v}\frac{\underline{\rho}\mathrm{d}v\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r}$$

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{v}\frac{\underline{\mathbf{J}}\mathrm{d}v\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r}$$

$$\mathrm{div}\ \underline{\mathbf{A}} = -\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu\underline{V}$$

$$\beta = \omega / c = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = 2\pi f / c = 2\pi/\lambda$$

Фазни коефицијент

Везе поља-потенцијали

$$\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathrm{A}} - \mathrm{grad}\,\underline{V} = -\mathrm{j}\omega\left(\underline{\mathbf{A}} + \frac{1}{\beta^2}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{A}}\right)$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{A}}$$

$$\underline{\rho} = \frac{\mathrm{j}}{\omega}\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{J}}$$

Расподела наелектрисања
у простопериодичном пољу

Комплексно електрично поље

$$\underline{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \frac{\underline{\rho}\,\mathrm{d}v\; \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r}$$

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\underline{\mathbf{J}}\,\mathrm{d}v\; \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r}$$

$$\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{A}} - \mathrm{grad}\,\underline{V}$$

$$\mathrm{grad}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r} = -\frac{\left(1+\mathrm{j}\beta r\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r^2}\mathbf{r}_0$$

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\underline{\mathbf{J}}\,\mathrm{d}v\; \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \underline{\rho}\,\mathrm{d}v\,\frac{\left(1+\mathrm{j}\beta r\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r^2}\mathbf{r}_0}$$

Услов квазистационарности

$$\boxed{\beta r << 1}$$

$$\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\underline{\mathbf{J}}\mathrm{d}v\, \cancel{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \underline{\rho}\mathrm{d}v \frac{\left(1+\cancel{\mathrm{j}\beta r}\right)\cancel{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}}{r^2}\mathbf{r}_0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\underline{\mathbf{J}}\mathrm{d}v}{r} + \frac{\mathbf{1}}{4\pi\varepsilon}\int_v \underline{\rho}\mathrm{d}v \frac{\mathbf{r}_0}{r^2}$$

Поинтингова теорема

– биланс снага електромагнетског поља

Биланс енергије

- Посматрамо **коначан** домен (област)
- **Стране силе** улажу енергију у домен
- Део енергије се претвара у **топлоту**
- Део енергије се претвара у енергију **електромагнетског поља** у домену
- Део енергије се **пренесе** ван домена

Поинтингова теорема

$$\int_v \mathbf{E}_\mathrm{i} \cdot \mathbf{J}\,\mathrm{d}v = \int_v \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial}{\partial t}\int_v \left(\frac{1}{2}\varepsilon|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\mathbf{H}|^2\right)\mathrm{d}v + \oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Снага страних сила

Снага Џулових губитака

Брзина повећања укупне електро-магнетске енергије

Брзина преношења енергије из домена у околину

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \left(\frac{1}{2}\varepsilon|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\mathbf{H}|^2\right)\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}W_\mathrm{tot}}{\mathrm{d}t}$$

$$W_\mathrm{tot} = W_\mathrm{e} + W_\mathrm{m} = \int_v \frac{1}{2}\varepsilon|\mathbf{E}|^2\,\mathrm{d}v + \int_v \frac{1}{2}\mu|\mathbf{H}|^2\,\mathrm{d}v$$

Поинтингов вектор

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}}$$

$$\boxed{\underline{\mathcal{P}} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*}$$

Поинтингов вектор представља површинску густину снаге а правац и смер му се поклапају са правцем и смером преноса електромагнетске енергије

Брзопроменљиво поље

Електрична кола при високим учестаностимаа

Идеални елементи

- Теорија електричних кола ради са идеалним елементима
- Проводници су кратки спојеви а димензије и облик се занемарују
- Спреге се остварују само проводницима и спрегнутим калемовима (индуктивно)
- Елементи су фреквенцијски независни

Индукована емс проводника

- При вишим учестаностима у свим проводницима индукује се емс
- Јавља се самоиндукција и међусобна индукција
- Прикључци елемента постају индуктивни
- Кондензатори и отпорници показују индуктивна својства

Нагомилана наелектрисања

- При вишим учестаностима на проводницима се јављају нагомилана наелектрисања
- Појављује се паралелна капацитивност отпорника велике отпорности
- Јавља се капацитивност између суседних завојака калема или слојева намотаја

Пораст губитака

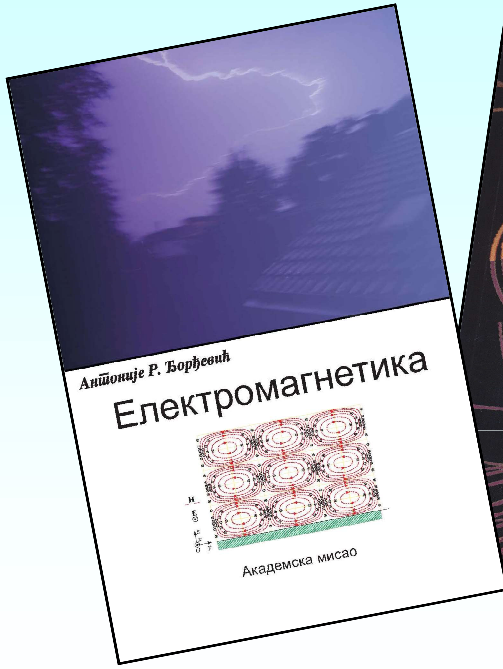
- Губици у проводницима расту са порастом учестаности
- Са порастом учестаности расту губици у језгрима калемова и трансформатора
- Губици у диелектрику кондензатора расту са порастом учестаности
- Губици се описују (моделују) фреквенцијско зависним отпорницима

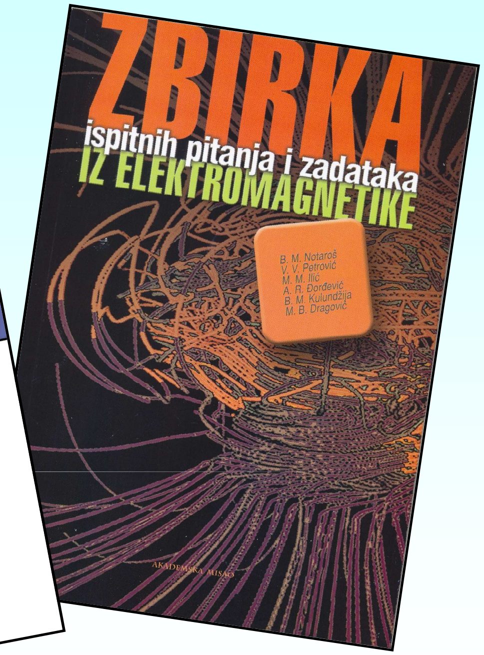
Активни елементи

- Са порастом учестаности појављују се паразитне капацитивности pn спојева
- Опада појачање активних елемената
- Расте капацитивност инверзно поларизованих спојева
- Повећава се капацитивност електрода електронских цеви

Ефекти простирања

- Са даљим повећањем учестаности долазе до изражаја ефекти простирања
- Сигнали касне (проблем синхронизације)
- Коло зрачи (омета друге уређаје)
- Јака преслушавања (спреге)
- Сигнали се изобличавају (дисторзија)
- Јавља се самоосциловање и нестабилност





наставиће се...