Obavezni dopunski materijal iz Elektromagnetike za odsek OF (2/2)

Odabrani delovi knjige

Elektromagnetika

Branka D. Popovića

(sa odobrenjem vlasnika autorskih prava)
10.3.2008.

***2.6. Teorema jedinstvenosti rešenja Maksvelovih jednačina.** Teorema koju ćemo dokazati u ovom odeljku kaže da ista pobuda određenog linearnog sistema uvek prouzrokuje isto elektromagnetsko polje u njemu. Ta teorema je važna iz više razloga. Na primer, do rešenja problema možemo doći na više načina i u vidu prividno različitih matematičkih izraza; po teoremi jedinstvenosti rešenja Maksvelovih jednačina, sva ta rešenja moraju biti ekvivalentna. Takođe, od izuzetne je važnosti znati da će se određeni sistem, pobuđen na isti način u raznim vremenima, uvek isto ponašati. Zatim, od teorijskog interesa je izučiti pod kojim uslovima je elektromagnetsko polje u nekom sistemu jedinstveno, naime koji su podaci neophodni da bi se dobilo rešenje. Na kraju, niz drugih teorema i osobina elektromagnetskog polja mogu se dokazati korišćenjem teoreme jedinstvenosti rešenja.

Od interesa su dva oblika opšte teoreme jedinstvenosti rešenja. Jedan oblik se odnosi na jedinstvenost rešenja u slučaju izvora u neograničenoj sredini. Drugi se odnosi na jedinstvenost rešenja Maksvelovih jednačina samo unutar izvesnog domena. Ovaj drugi oblik ima više primena, na primer u teoriji likova, teoriji ekvivalentnih izvora itd.

Posmatrajmo prvo domen v ograničen površi S. Neka je sredina *linearna* u užem smislu i neka unutar S postoje izvori (pobudne električne i magnetske struje) koji su uključeni u trenutku $t = 0$ ili kasnije*. Pretpostavimo, takođe, da postoje i izvori izvan S, koji mogu biti proizvoljno raspoređeni, ali su isto tako uključeni u trenutku $t = 0$ ili kasnije. Želimo da ispitamo pod kojim uslovima je elektromagnetsko polje unutar S jedinstveno.

Pretpostavimo da su moguća dva rešenja Maksvelovih jednačina, recimo stoga što su u dva eksperimenta izvori unutar v uključeni na isti način, ali su izvori izvan v različiti. Obeležimo ta polja sa $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$ i $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$ (razume se, svi vektori su funkcije položaja tačke i vremena). I razlike ovih polja zadovoljavaju Maksvelove jednačine (pretpostavili smo da je sredina linearna, pa važi teorema superpozicije). Međutim, kako su izvori polja unutar v u oba slučaja isti, razlike $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2)$ i $\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)$ nemaju izvora unutar v. (To se vidi ako oduzmemo Maksvelove jednačine za $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$ od onih za $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$.) Primenimo na polje $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ Pointingovu teoremu (1) prethodnog odeljka. Imajući u vidu da je

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon\, \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(1/2\, \varepsilon E^2),$$

i slično za $\boldsymbol{H} \cdot \partial \boldsymbol{B}/\partial t$, Pointingova teorema za polje $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ koje unutar v nema izvora glasi

$$0 = \int_v \sigma E^2\, \mathrm{d}v + \frac{\partial}{\partial t} \int_v (1/2\, \varepsilon E^2 + 1/2\, \mu H^2)\, \mathrm{d}v + \\ + \oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{1}$$

Prvi član sa desne strane predstavlja Džulove gubitke u domenu v, i sigurno je pozitivan. Drugi član predstavlja izvod po vremenu elektromagnetske energije

* Teorema se može dokazati i za sredinu linearnu u širem smislu, ali je dokaz duži i složeniji, pa ga ovde nećemo izvoditi. Takođe, na isti način kao niže teorema se može dokazati ako se pretpostavi da je u trenutku $t = 0$ elektromagnetsko polje unutar v *zadato* (a ne nula).

unutar v, i može biti i pozitivan i negativan. Treći član opisuje razmenu elektromagnetske energije kroz S, i može, takođe, biti i pozitivan i negativan.

Pretpostavimo da je površinski integral u poslednjoj jednačini jednak nuli. (Niže ćemo ispitati kada to sve može biti slučaj.) Tada drugi član, izvod po vremenu elektromagnetske energije polja $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ unutar v, mora u svakom trenutku biti negativan ili nula (ako je, eventualno, sredina bez gubitaka). Međutim, pretpostavili smo da do trenutka $t = 0$ nije bilo polja, dakle ni energije sadržane u polju. Izvod energije po vremenu stoga ne može biti negativan, jer energija polja ne može biti manja od nule. Gornja jednačina je otuda zadovoljena samo ako je $E = 0$ i $H = 0$, odnosno $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2$ i $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2$ za $t > 0$. Dakle, rešenje Maksvelovih jednačina je jedinstveno ako je površinski integral u gornjoj jednačini jednak nuli. Ispitajmo kada je to slučaj.

Pretpostavimo da je za $t > 0$ *zadata* tangencijalna komponenta vektora $\boldsymbol{E}$ u svim tačkama površi S, *ili* tangencijalna komponenta vektora $\boldsymbol{H}$, *ili* tangencijalna komponenta vektora $\boldsymbol{E}$ na jednom delu površi S, a tangencijalna komponenta vektora $\boldsymbol{H}$ na ostatku. Drugim rečima, pretpostavimo da polja u dva posmatrana slučaja ispunjavaju jedan od tih uslova, tj. da u svim tačkama površi S jedan od vektora razlike rešenja, $\boldsymbol{E}$ ili $\boldsymbol{H}$, bude na nju upravan. Tada je Pointingov vektor $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ u svim tačkama površi na nju tangentan, pa je poslednji član u gornjoj jednačini jednak nuli, a rešenje jedinstveno. Na osnovu ovoga možemo iskazati sledeću teoremu jedinstvenosti rešenja Maksvelovih jednačina: rešenje Maksvelovih jednačina u domenu v ograničenom površi S (unutar koje može biti i izvora) jedinstveno je određeno izvorima unutar S i *bilo* tangencijalnom komponentom vektora $\boldsymbol{E}$ na površi S, *bilo* tangencijalnom komponentom vektora $\boldsymbol{H}$, *bilo* tangencijalnom komponentom vektora $\boldsymbol{E}$ na jednom delu površi, a tangencijalnom komponentom vektora $\boldsymbol{H}$ na ostatku površi, u svakom trenutku $t > 0$, pod uslovom da do trenutka $t = 0$ nije bilo polja.

Poseban oblik teoreme za slučaj neograničene sredine sledi direktno, pošto *uvek možemo površ S izabrati tako velikom da polje do nje (zbog konačne brzine* prostiranja) još nije stiglo. I tada je površinski integral u poslednjoj jednačini jednak nuli, te je rešenje jedinstveno.

U prostoperiodičnom slučaju teorema se lako može proširiti i na sredine linearne u širem smislu. Tada se umesto jednačine (1) može napisati jednačina koja sledi iz Pointingove teoreme u kompleksnom obliku, jednačine (14), (23) i (24) prethodnog odeljka, u kojima treba staviti da je leva strana nula. Pretpostavimo opet da je površinski integral jednak nuli. Ako postoje gubici, jednačina (23) odmah daje da mora biti $E = 0$, i $H = 0$. Ako nema gubitaka, teorema ne važi, pošto prema jednačini (24) mora biti jednak nuli integral od $(\mu' H^2 - \varepsilon' E^2)$, što je moguće i ako nije $E = 0$ i $H = 0$. Na prvi pogled ovo izgleda neobično, ali se može razumeti bez teškoća. U ustaljenom prostoperiodičnom režimu, koji reprezentuju Maksvelove jednačine u kompleksnom obliku, informacija o tome kako je i kada polje uspostavljeno ne postoji, pa u principu ne možemo reći kakvo sve polje može postojati u sredini bez gubitaka.

Dakle, u prostoperiodičnom slučaju elektromagnetsko polje u domenu v u kome postoje gubici (ma kako mali) je jedinstveno određeno izvorima u v i komponentom $\underline{\boldsymbol{E}}_{\text{tang}}$ na površi S koja obuhvata domen, ili $\underline{\boldsymbol{H}}_{\text{tang}}$ na toj površi, ili $\underline{\boldsymbol{E}}_{\text{tang}}$ na jednom delu površi, a $\underline{\boldsymbol{H}}_{\text{tang}}$ na ostatku.

skalarni potencijal V zadovoljava diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = -\varrho/\varepsilon. \tag{1}$$

Ova jednačina se naziva *Poasonova jednačina*. (Ime je dobila po francuskom matematičaru S. D. Poisson-u, 1781—1840.) Njeno rešenje nam je poznato:

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{v'} \frac{\varrho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}v'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \tag{2}$$

Dok je rešenje (2) moguće koristiti samo ako sredina ima istu permitivnost u *svim* tačkama, jednačina (1) očigledno važi i ako je sredina u vidu homogenih delova, sa oštrim prelazima osobina iz jednog dela u drugi, u svim tačkama sem na graničnim površima.

Ako je u nekom *homogenom* domenu $\varrho = 0$, Poasonova jednačina se svodi na tzv. *Laplasovu jednačinu*,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = 0. \tag{3}$$

(Pierre Simon Laplace, 1749—1827, bio je veliki francuski astronom i matematičar.) Laplasova jednačina važi u svim tačkama *homogenih* domena, ali ne i na granicama diskontinuiteta.

Mada poseban slučaj, Laplasova jednačina (3) je od znatno veće važnosti nego Poasonova jednačina (1). To je stoga što se prostorna raspodela opterećenja u dielektriku kao izvor elektrostatičkog polja mnogo ređe sreće od naelektrisanih provodnih tela kao izvora polja u dielektriku u kome nema opterećenja.

3.4.1. Teorema jedinstvenosti rešenja Poasonove i Laplasove jednačine. Teorema jedinstvenosti rešenja Maksvelovih jednačina, izvedena u odeljku 2.6, bila je dokazana polazeći od Pointingove teoreme. Pointingova teorema je besmislena za elektrostatičko polje, te se dokaz jedinstvenosti rešenja ne može preneti na elektrostatiku. Stoga ćemo ispitati pod kojim uslovima su rešenja jednačina (1) odnosno (3) jedinstvena ili se, eventualno, razlikuju međusobno za konstantu. Pošto je $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V$, time je obezbeđena i jedinstvenost rešenja Maksvelovih jednačina za elektrostatičko polje, tj. jednačina $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ i $\operatorname{div} \varepsilon\boldsymbol{E} = \varrho$.

Posmatrajmo elektrostatičko polje unutar domena v ograničenog površi S. Površ S se može sastojati i od više površi, $S_0, S_1, \ldots, S_n$, koje domen ograničavaju spolja i iznutra, kao što je prikazano na sl. 3.13. Neka je permitivnost ε dielektrika u svim tačkama domena v ista (homogena sredina u v), i neka unutar v postoje opterećenja poznate gustine ϱ, koja posebno može biti i nula u svim tačkama. Pretpostavimo da unutar S postoje dva rešenja, V_1 i V_2, Poasonove jednačine (odnosno Laplasove jednačine ako je $\varrho = 0$), recimo stoga što se izvori van S razlikuju. Pošto mora biti $\Delta V_1 = -\varrho/\varepsilon$ i $\Delta V_2 = -\varrho/\varepsilon$, to je $\Delta(V_1 - V_2) = 0$. Dakle, u oba slučaja ($\varrho \neq 0$ i $\varrho = 0$) razlika rešenja zadovoljava Laplasovu jednačinu. Stavimo, zbog kraćeg pisanja, $V_1 - V_2 = V$. Ispitajmo pod kojim uslovima je $V = 0$ (tj. $V_1 = V_2$) ili $V = V_0 =$ konstanta (odnosno $V_1 = V_2 +$ konstanta).

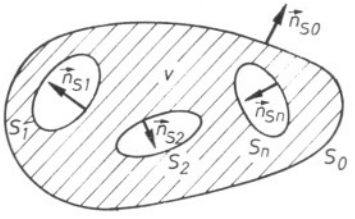
Za dokaz nam treba jedan identitet vektorske analize koji ćemo sada izvesti. Znamo da je, za dve skalarne funkcije F i G,

$$\operatorname{div}(F \operatorname{grad} G) = F \operatorname{div}(\operatorname{grad} G) + \operatorname{grad} F \cdot \operatorname{grad} G.$$

Pomnožimo ovu jednačinu elementarnom zapreminom dv, integralimo je po proizvoljnoj zapremini i primenimo na levu stranu tako dobijene jednačine teoremu Gaus--Ostrogradskog. Dobijamo identitet

$$\oint_S (F \operatorname{grad} G) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_v [F \operatorname{div} (\operatorname{grad} G) + \operatorname{grad} F \cdot \operatorname{grad} G]\, dv. \tag{4}$$

Ovaj identitet se obično naziva *prvi Grinov identitet*.



Sl. 3.13. Domen v ograničen složenom površi S koja se sastoji od više zatvorenih površi $S_0, S_1, \ldots, S_n$.

Stavimo u identitet (4) $F = G = V$. Pošto je $\operatorname{div} (\operatorname{grad} V) = 0$ i $\operatorname{grad} V \cdot d\boldsymbol{S} = (\partial V/\partial n)\, dS$, gde je $\partial V/\partial n$ izvod od V u pravcu i smeru izlazne normale na S, dobijamo da razlika potencijala V mora zadovoljavati jednačinu

$$\oint_S V \frac{\partial V}{\partial n}\, dS = \int_v (\operatorname{grad} V)^2\, dv. \tag{5}$$

Pretpostavimo da je leva strana ove jednačine nula. Pošto je $(\operatorname{grad} V)^2 \geqslant 0$, to je tada bilo $V = 0$, bilo $V = V_0 =$ konstanta, upravo ono što želimo da postignemo. Ispitajmo kada je sve leva strana jednačine (5) nula. Lako je ustanoviti da je to ispunjeno, između ostalih slučajeva, i u sledećim, za nas važnim slučajevima:

1) $V = 0$, tj. $V_1 = V_2$ u svim tačkama površi S (odnosno površi $S_0, S_1, \ldots, S_n$ u slučaju složene površi prikazane na sl. 3.13); tada je u svim tačkama unutar domena $V_1 = V_2 + V_0$. Kako je na površi $V_1 = V_2$, to je $V_0 = 0$, odnosno u svim tačkama je $V_1 = V_2$.

2) $\partial V/\partial n = 0$ u svim tačkama površi S (odnosno površi $S_0, S_1, \ldots, S_n$ kada je S složena površ); tada je u svim tačkama domena $V_1 = V_2 + V_0$, ali sada u opštem slučaju nije $V_0 = 0$, jer na površi S nije zadato $V = 0$, već $\partial V/\partial n = 0$, pa je na površi $\partial V_1/\partial n = \partial V_2/\partial n$.

3) $V = V_0$ na površi S (odnosno na površima $S_0, S_1, \ldots, S_n$), gde je V_0 *nepoznato*, i $\oint_S \partial V/\partial n\, dS = 0$; pošto je $\partial V/\partial n = -E_n$, imajući u vidu Gausov zakon vidimo da ovo odgovara slučaju provodnih naelektrisanih tela čiji su potencijali nepoznati, ali *konstantni*, a *ukupno* naelektrisanje svakog tela zadato. U ovom slučaju potencijal u v je određen do tačnosti aditivne konstante (tj. $V_1 = V_2 + V_0$).

4) Bilo koja kombinacija uslova 1—3 na površima $S_0, S_1, \ldots, S_n$ obezbeđuje da je $V_1 = V_2 +$ konstanta ili $V_1 = V_2$.

Prema onome što je zadato, uslovi su dobili posebna imena. Uslov prve vrste (zadato V na S, tj. $V_1 = V_2$ na S) naziva se *Dirihletov uslov* (po nemačkom matematičaru G. L. Dirichlet-u 1805—1859). Uslov druge vrste (zadato $\partial V/\partial n$ na S, tj. $\partial V_1/\partial n = \partial V_2/\partial n$ na S) naziva se *Nojmanov uslov* (po nemačkom fizičaru F. Neu-

mann-u, 1798—1895). Ako je na S zadato i V i $\partial V/\partial n$, uslov se naziva *Košijev uslov* (po francuskom matematičaru A. Cauchy-ju, 1789—1857). Videli smo da je Košijev uslov preodređen, pa u opštem slučaju rešenja nema.

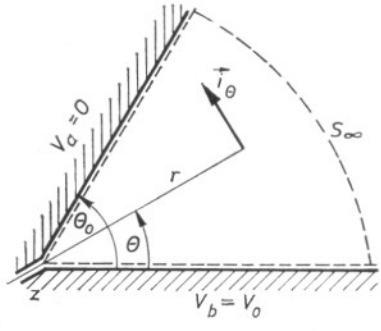
Metode za rešavanje Laplasove jednačine opisaćemo u jednom kasnijem poglavlju. Videćemo da se često rešenje nalazi probom. Teorema koju smo dokazali obezbeđuje da je to rešenje jedinstveno ako zadovoljava Laplasovu (ili Poasonovu) jednačinu i jedan od gornjih uslova.

Kao primer primene teoreme jedinstvenosti rešenja Laplasove jednačine, posmatrajmo dvodimenzioni ugaonik prikazan na sl. 3.14. Jedna ivica ugaonika je na potencijalu $V_a = 0$, druga na potencijalu $V_b = V_0$. Naslućujemo da potencijal u ovom slučaju može biti oblika $V(r, \theta) = V_0 \cdot (\theta_0 - \theta)/\theta_0$. Ova funkcija zadovoljava granične uslove na ravnim površima ugaonika, a istovremeno Laplasovu jednačinu u cilindričnom koordinatnom sistemu, koja glasi (v. Dodatak 2)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Pokazaćemo da je to pravo rešenje problema.

Zamislimo zatvorenu cilindričnu površ koja je ograničena poluravnima ugaonika, dve ravni upravne na njih i krivom površi S_∞ koju obrazuju linije vektora $\boldsymbol{E}$ (koje, istina, ne znamo). Tada na delovima zatvorene površi priljubljenim uz poluravni potencijal znamo, a na ostalim delovima je $\partial V/\partial n = 0$. Uslovi teoreme jedinstvenosti su, dakle, zadovoljeni, pa je rešenje problema koje smo naslutili pravo, jedino moguće rešenje.



Sl. 3.14. Primer primene teoreme jedinstvenosti rešenja Laplasove jednačine.

Pošto je $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V$, imajući u vidu izraz za gradijent u cilindričnom koordinatnom sistemu, za vektor $\boldsymbol{E}$ dobijamo

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{V_0}{r\theta_0}\boldsymbol{i}_\theta.$$

Linije vektora $\boldsymbol{E}$ su delovi kruga sa centrima na osi z.

****3.5. Razvoj potencijala po multipolima.** Sada ćemo pokazati da je svaki sistem opterećenja u homogenoj sredini, ograničen sferom proizvoljnog poluprečnika, u odnosu na domen izvan te sfere moguće zameniti sistemom ekvivalentnih

Na kraju, brzina prostiranja faze v_f u takvom slučaju je, prema (12),

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \simeq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right) \qquad (\sigma \ll \omega\varepsilon). \tag{14}$$

12.5. Prostiranje uniformnih ravnih talasa u dobrom provodniku. Posmatrajmo sada slučaj kada se uniformni prostoperiodični talas prostire u dobrom provodniku. Tada je $\sigma \gg \omega\varepsilon$, pa za koeficijent prostiranja dobijamo približan izraz

$$\underline{\gamma} = \mathrm{j}\omega\sqrt{-\mathrm{j}\sigma\mu/\omega} = \mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}\sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\omega\mu\sigma/2} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\pi\mu f\sigma}. \tag{1}$$

Tako je za dobar provodnik

$$\alpha \simeq \beta \simeq \sqrt{\pi\mu f\sigma} \qquad (\sigma \gg \omega\varepsilon). \tag{2}$$

Impedansa dobrog provodnika, prema jednačini (4) prethodnog odeljka,

$$\underline{Z} \simeq \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu/\sigma}. \tag{3}$$

Talasi koji se prostiru kroz dobar provodnik slabe veoma brzo. Na primer, u bakru ($\sigma \simeq 58 \cdot 10^6$ S/m, $\mu \simeq \mu_0$), pri učestanosti $f = 1$ MHz, koeficijent slabljenja $\alpha \simeq 15150$ Np/m. To znači da se amplituda talasa na dužini od 1 mm smanji za $e^{15,15} \simeq 3{,}8 \cdot 10^6$ puta. Pošto je $\alpha = \beta$, talasna dužina talasa je $\lambda = 2\pi/\beta \simeq 415$ μm (prema $\lambda_0 = 300$ m u vakuumu). Očigledno, prostiranje kroz dobre provodnike je ograničeno na prodiranje talasa iz okolnog dielektrika do neke male dubine, dok se o nekom prostiranju talasa praktično ne može govoriti. U stvari, radi se o nama poznatom površinskom efektu (v. odeljak 11.2). U odeljku 11.2 upravo smo analizirali prodiranje uniformnog ravnog talasa od površi provodnika u njegovu dubinu, mada to tamo nismo tako nazvali. Sada razumemo da zbog veoma male talasne dužine talasa u dobrom provodniku već pri relativno niskim učestanostima talas možemo tretirati kao uniforman ravan talas bez obzira na zakrivljenost površi provodnika. Čitaocu se savetuje da ponovo pročita odeljak 11.2 i pokuša da dođe i sam do zaključka da se tamo radi upravo o uniformnom ravnom talasu.

12.6. Prostiranje ravnih elektromagnetskih talasa kroz jonizovane gasove. Gornji slojevi atmosfere, približno između 50 km i 500 km iznad površi Zemlje, su u vidu razređenog jonizovanog gasa. Taj jonizovani sloj atmosfere naziva se *jonosfera*. Jonosfera ima snažan uticaj na prostiranje elektromagnetskih talasa. U ovome odeljku analiziraćemo prostiranje uniformnih ravnih talasa kroz jonizovan gas. Zbog uprošćenja, zanemarićemo sudare jona sa neutralnim molekulima gasa, tj. slabljenje talasa.

Posmatrajmo ravan uniforman talas koji se prostire kroz homogen jonizovan gas. Mada u gasu uvek postoje i pozitivni i negativni joni, na prostiranje talasa pretežno utiču elektroni, zbog znatno većeg odnosa naelektrisanje/masa od onog za bilo koje druge negativne ili pozitivne jone. (Ova tvrdnja je donekle očigledna, ali ćemo je niže i dokazati.) Neka je naelektrisanje elektrona Q ($Q < 0$), njihova masa m, koncentracija N, i neka se vektor jačine električnog polja talasa u posmatranoj

tački menja u vremenu kao $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_m \cos \omega t$. Jednačina kretanja jedne naelektrisane čestice pod dejstvom električnog i magnetskog polja talasa glasi

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = Q\boldsymbol{E}_m \cos \omega t + Q\boldsymbol{v} \times \mu_0 \boldsymbol{H}_m \cos \omega t. \tag{1}$$

Pošto između amplituda električnog i magnetskog polja postoji veza $E_m = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\, H_m$, odnos amplituda drugog i prvog člana sa desne strane jednačine je reda v/c_0. Stoga se drugi član u odnosu na prvi može zanemariti. Tako je, vrlo približno, brzina čestice pod dejstvom elektromagnetskog talasa,

$$\boldsymbol{v} = \frac{Q}{\omega m} \boldsymbol{E}_m \sin \omega t.$$

Integraciona konstanta jednaka je nuli, pošto je kretanje jona sigurno prostoperiodično. Gustina konvekcione struje u jonizovanom gasu je odavde

$$\boldsymbol{J} = NQ\boldsymbol{v} = \frac{NQ^2}{\omega m} \boldsymbol{E}_m \sin \omega t.$$

Tako druga Maksvelova jednačina postaje

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon_0\, \partial \boldsymbol{E}/\partial t = (NQ^2/\omega m - \varepsilon_0\, \omega)\, \boldsymbol{E}_m \sin \omega t,$$

ili

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -\omega\, (\varepsilon_0 - NQ^2/\omega^2 m)\, \boldsymbol{E}_m \sin \omega t.$$

Za $N = 0$ (vakuum), drugog člana u zagradi ne bi bilo. Stoga se uticaj jona može svesti na ekvivalentno *smanjenje* permitivnosti. (Vidimo da je taj uticaj zaista utoliko izraženiji ukoliko je odnos Q^2/m veći.) Definišimo *prividnu permitivnost* jonizovanog gasa u odnosu na talas ugaone učestanosti ω sa

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{NQ^2}{\varepsilon_0\, \omega^2 m}\right) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{f_c^2}{f^2}\right), \tag{2}$$

gde je

$$f_c = \sqrt{\frac{NQ^2}{4\pi^2 \varepsilon_0\, m}} \tag{3}$$

tzv. *kritična učestanost* jonizovanog gasa. Svi zaključci o ravnim uniformnim talasima u savršenom dielektriku do kojih smo došli važe i sada, sem što permitivnost dielektrika treba da zamenimo prividnom permitivnošću ε'. Posebno, fazni koeficijent je sada

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu_0} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - f_c^2/f^2} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}, \tag{4}$$

a brzina prostiranja faze

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - f_c^2/f^2}}. \tag{5}$$

Ako je $f > f_c$, izraz pod korenom je pozitivan, pa je $v_f > c_0$. Već smo objasnili da to nije u suprotnosti sa činjenicom da je c_0 najveća moguća brzina. Brzinu prostiranja *signala* u jonizovanom gasu odredićemo u sledećem odeljku.

Ako je $f < f_c$, međutim, izraz pod znakom korena je negativan, što znači da se talasi učestanosti niže od f_c ne mogu prostirati kroz jonizovan gas. Otuda se f_c i zove „kritična frekvencija".

****12.6.1. Prostiranje ravnih talasa kroz jonizovan gas izložen magnetskom polju. Faradejeva rotacija.** Jonosferu prožima Zemljino magnetsko polje, pa je korisno ispitati da li ono utiče na prostiranje talasa kroz jonizovane gasove. Posmatraćemo linijski polarizovan talas koji se prostire kroz jonizovan gas u pravcu i smeru vektora $\boldsymbol{B}_0$ homogenog, vremenski konstantnog magnetskog polja. Videćemo da talas ostaje linijski polarizovan, ali da se vektori $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{H}$ polja *okreću* u toku prostiranja talasa. To se naziva *Faradejeva rotacija.*

Prema zaključku posle jednačine (1), strano magnetsko polje može imati primetnog uticaja na prostiranje talasa samo ako je $|\boldsymbol{B}_0| \gg \mu_0 |\boldsymbol{H}_m|$. Stoga se jednačina kretanja naelektrisane čestice pod dejstvom polja talasa i stranog magnetskog polja može napisati u obliku

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = Q\,\boldsymbol{E}(t) + Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0. \tag{6}$$

Posmatrajmo sada uniforman, linijski polarizovan ravan talas koji se prostire duž z-ose, za sada u *nejonizovanoj* sredini. Neka su komponente vektora $\boldsymbol{E}$ talasa

$$E_x(z, t) = 2E_m \cos(\omega t - \beta z), \qquad E_y(z, t) = 0.$$

Ove se jednačine mogu napisati i u obliku

$$E_x(z, t) = E_{x1}(z, t) + E_{x2}(z, t), \qquad E_y(z, t) = E_{y1}(z, t) + E_{y2}(z, t),$$

gde je

$$E_{x1}(z, t) = E_m \cos(\omega t - \beta z), \qquad E_{y1}(z, t) = E_m \sin(\omega t - \beta z), \tag{7}$$

$$E_{x2}(z, t) = E_m \cos(\omega t - \beta z), \qquad E_{y2}(z, t) = -E_m \sin(\omega t - \beta z). \tag{8}$$

Očigledno, jednačine (7) su jednačine desno kružno polarizovanog talasa, a jednačine (8) levo kružno polarizovanog talasa (gledano u smeru z-ose). Dakle, linijski polarizovan talas se uvek može predstaviti kao zbir desno i levo kružno polarizovanog talasa. Vektor $\boldsymbol{E}(z, t)$, dat zbirom komponenata (7) i (8), u svakom trenutku je paralelan x-osi.

Zamislimo sada da je sredina jonizovana i posmatrajmo talase (7) i (8) u ravni $z = 0$. Zbog skraćenja pisanja, stavimo

$$E_x = E_m \cos \omega t, \qquad E_y = \pm E_m \sin \omega t. \tag{9}$$

Gornji znak se odnosi na desno, a donji na levo polarizovan talas. Prema jednačini (6), jednačine kretanja naelektrisanih čestica u elektromagnetskom polju talasa i polju $\boldsymbol{B}_0$ imaju oblik (pretpostavili smo da je vektor $\boldsymbol{B}_0$ u smeru z-ose)

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{Q}{m}E_x + \frac{QB_0}{m}v_y, \qquad \frac{dv_y}{dt} = \frac{Q}{m}E_y - \frac{QB_0}{m}v_x. \tag{10}$$

12.7. Brzina prostiranja grupe. Videli smo da se u slučaju uniformnog ravnog talasa u homogenom dielektriku energija prostire istom brzinom, $c = \sqrt{\varepsilon\mu}$, kao i faza talasa, i da je ta brzina ista za sve frekvencije. Naime, pošto se nulte vrednosti *oba* polja talasa poklapaju i prostiru istom brzinom c, energija sadržana u električnom i magnetskom polju između dve takve „nulte" ravni se, očigledno, takođe kreće tom brzinom. Već smo pomenuli da se brzina prostiranja energije naziva i *brzina prostiranja grupe*.

Brzina prostiranja grupe u *disperzivnim* sredinama, međutim, može se definisati samo u slučaju signala koji se mogu predstaviti *uskim opsegom učestanosti*. Izvešćemo izraz za brzinu prostiranja grupe prvo na elementaran način u jednom posebnom slučaju, a potom ćemo do istog izraza doći egzaktno, koristeći se pojmovima harmonijske analize (Furijeove transformacije).

12.7.1. Izvođenje izraza za brzinu prostiranja grupe analizom jednog posebnog slučaja. Posmatrajmo dva ravna talasa istog pravca vektora $\boldsymbol{E}$ i iste amplitude, ali malo različitih ugaonih učestanosti ω_1 i ω_2, koji se prostiru kroz linearnu disperzivnu sredinu u smeru z-ose. Pošto je sredina disperzivna, i fazni koeficijenti dva talasa se malo razlikuju. Obeležimo ih sa β_1, odnosno β_2.

Neka je prvi talas oblika $f_1(z, t) = \cos(\omega_1 t - \beta_1 z)$, a drugi $f_2(z, t) = \cos(\omega_2 t - \beta_2 z)$. Rezultantni talas je tada oblika

$$f_1(z, t) + f_2(z, t) = \cos(\omega_1 t - \beta_1 z) + \cos(\omega_2 t - \beta_2 z).$$

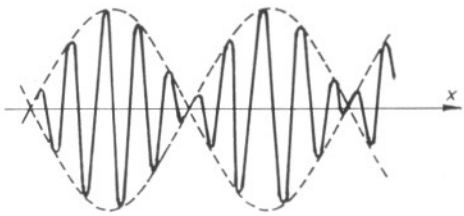
Predstavimo zbir kosinusa u vidu dvostrukog proizvoda kosinusa poluzbira i polurazlike argumenata, i stavimo

$$(\beta_1 + \beta_2)/2 = \beta, \quad (\omega_1 + \omega_2)/2 = \omega, \quad \beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta, \quad \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega.$$

Dobijamo da je

$$f_1(z, t) + f_2(z, t) = 2\cos[(\Delta\omega \cdot t - \Delta\beta \cdot z)/2]\cos(\omega t - \beta z).$$

Pošto je $\Delta\omega \ll \omega$, u jednom trenutku ova funkcija ima oblik skiciran na sl. 12.8. Brzina prostiranja grupe, v_g, jednaka je, očigledno, brzini prostiranja obvojnice



Sl. 12.8. Zbir dve prostoperiodične funkcije iste amplitude, a malo različitih učestanosti.

(anvelope), odnosno brzini prostiranja funkcije $\cos[(\Delta\omega \cdot t - \Delta\beta \cdot z)/2]$. Prema tome,

$$v_g = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{d\beta/d\omega} \quad \text{(brzina prostiranja grupe).} \tag{1}$$

Brzina prostiranja faze talasa $v_f = \omega/\beta$. Razume se, $\beta = \beta(\omega)$, pa je i $v_f = v_f(\omega)$.

Na primer, u slučaju jonizovanog gasa brzina prostiranja faze data je jednačinom (4) prethodnog odeljka. Jednačina (1) daje za brzinu prostiranja grupe u jonizovanom gasu

$$v_g = c_0 \sqrt{1 - f_c^2/f^2}. \tag{2}$$

Mada je izraz (1) za brzinu prostiranja grupe izveden u posebnom slučaju dve prostoperiodične funkcije iste amplitude, a malo različitih učestanosti, može se pokazati da on važi za sve signale koji se mogu predstaviti uskim spektrom u okolini noseće učestanosti. Takav dokaz dat je u sledećem članu. Pošto ne daje neki nov rezultat, može se preskočiti bez prekidanja kontinuiteta izlaganja.

12.7.2. Izvođenje izraza za brzinu prostiranja grupe u opštem slučaju. Posmatrajmo amplitudski modulisan signal koji se prostire duž z-ose. Neka u koordinatnom početku, $z = 0$, signal ima oblik

$$f(x, y, 0, t) = a(x, y, 0)\, m(t) \cos \omega_0 t.$$

Ovde je $a(x, y, 0)$ amplituda nosioca signala za $z = 0$, $m(t)$ modulišući signal, a ω_0 ugaona učestanost nosioca. Pretpostavimo da prilikom prostiranja modulisanog signala kroz disperzivnu sredinu ne dolazi do primetne promene oblika modulišućeg signala. Želimo da odredimo njegovu brzinu — to je, po definiciji, brzina prostiranja grupe v_g. Ako je tu brzinu moguće definisati, u bilo kojoj tački z signal mora biti oblika

$$f(x, y, z, t) = a(x, y, z)\, m(t - z/v_g) \cos \omega_0 (t - z/v_f). \tag{3}$$

Razume se, i v_g i v_f su funkcije ugaone učestanosti nosioca.

Mi ne znamo brzinu prostiranja signala *proizvoljnog oblika* u disperzivnoj sredini — to upravo i tražimo. Znamo, međutim, da se prostiranje prostoperiodičnih talasa *bilo koje učestanosti* u kompleksnom obliku opisuje pomoću faktora $e^{-j\beta(\omega)z}$. Stoga ćemo transformisati signal $f(x, y, 0, t)$ u zbir prostoperiodičnih funkcija pomoću Furijevog integrala, pa ćemo Furijeov integral signala $f(x, y, z, t)$ dobiti prosto množenjem svake komponente Furijevog spektra sa $e^{-j\beta(\omega)z}$. Na kraju ćemo izvršiti inverznu transformaciju i dobiti signal na mestu z u vremenskom domenu. Iz njega će se videti kolika je brzina prostiranja grupe.

Setimo se da je Furijeova transformacija $G(j\omega)$ funkcije $g(t)$ data integralom

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt, \tag{4}$$

i da se $g(t)$ može dobiti iz $G(j\omega)$ inverznom transformacijom

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{5}$$

Tako je Furijeova transformacija $M(j\omega)$ modulišućeg signala $m(t)$ data sa

$$M(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t)\, e^{-j\omega t}\, dt.$$

Obično se nastoji da se što veći deo energije talasa prenese iz sredine 1 u sredinu 2, tj. da koeficijent refleksije i koeficijent stojećeg talasa budu što manji. Na primer, možemo želeti da neki objekat ne reflektuje energiju ka izvoru polja, recimo da ne bi mogao da se primeti radarom. Ali se, u nekim slučajevima, refleksija može i iskoristiti. Na primer, pretpostavimo da talas nailazi iz sredine poznatih osobina (recimo vazduha) upravno na površ iza koje je dielektrik nepoznatih osobina. Taj dielektrik ne mora biti ni savršen — tada, jedino, Z_2 postaje kompleksno. Merenjem odnosa stojećih talasa s i položaja minimuma i maksimuma polja u sredini 1 dobijamo eksperimentalne podatke iz kojih je moguće izračunati Z_2. Najprostiji takav slučaj je kada je Z_2 realno (sredina 2 savršen dielektrik). Tada je maksimum talasa uz razdvojnu ravan ako je $Z_2 > Z_1$, a minimum ako je $Z_2 < Z_1$. Pošto to eksperimentalno utvrdimo i nađemo s, iz jednačine (10) dobijamo R, pa zatim Z_2 prema jednačini (5). Kada je Z_2 kompleksno, postupak je analogan, samo nešto složeniji.

13.3.2. Slučaj nailaska primarnog talasa pod proizvoljnim uglom na razdvojnu ravan. Snelov zakon. Frenelovi koeficijenti. Kada primarni talas nailazi na razdvojnu ravan pod proizvoljnim uglom (a ne normalno), granični uslovi postaju složeniji. Razume se, i u ovom slučaju deo energije primarnog talasa prolazi u sredinu 2, a deo se odbija. Pravac prostiranja transmitovanog talasa zaklapa sa normalom na ravan drugačiji ugao od pravca prostiranja primarnog talasa. Otuda i naziv za taj talas *prelomljeni* ili *refraktovani* talas.

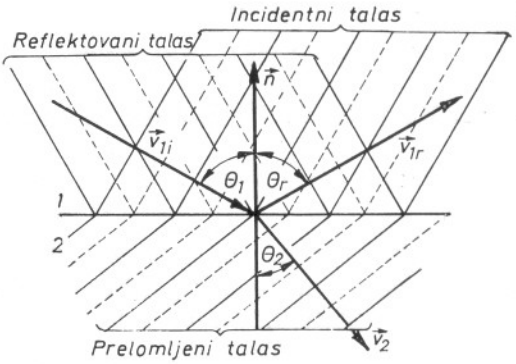
Amplitude prelomljenog i reflektovanog talasa zavise, između ostalog, i od polarizacije talasa. Međutim, uglovi koje pravci prostiranja ekvifaznih ravni tih talasa zaklapaju sa normalom na ravan *ne zavise* od polarizacije. Posmatrajmo ekvifazne ravni ta tri talasa u jednom trenutku, skicirane na sl. 13.7. Incidentni i reflektovani talas se prostiru brzinom $v_1 = (\varepsilon_1\mu_1)^{-1/2}$, a prelomljeni brzinom $v_2 = (\varepsilon_2\mu_2)^{-1/2}$. Na sl. 13.7 su trenutni položaji maksimuma polja talasa nacrtani punim linijama, a nula isprekidanim. Pretpostavimo da su u posmatranom trenutku granični uslovi zadovoljeni. Da bi oni ostali zadovoljeni u svim trenucima, neophodno je da se odnosi amplituda i faza tri talasa na ravni u toku vremena ne menjaju. To je moguće samo ako se „presečne linije" svih ekvifaznih ravni sa razdvojnom ravni kreću duž nje istom brzinom. Iz slike je gotovo očigledno da će to biti slučaj samo ako je $\theta_r = \theta_1$ i $v_1/\sin\theta_1 = v_2/\sin\theta_2$, odnosno

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12} \qquad \text{(Snelov zakon).} \tag{11}$$

Ova relacija se naziva *Snelov zakon* (Snell van Royen, 1580—1626, holandski fizičar). Odnos $v_1/v_2 = n_{12}$ naziva se *indeks prelamanja* za sredine 1 i 2 (naziv potiče iz optike). Pošto je, najčešće, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, dobijamo

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \qquad (\text{za } \mu_1 = \mu_2). \tag{12}$$

Pretpostavimo da je $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$. Prema Snelovom zakonu (11) i definiciji (12), za $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ je $\theta_1 > \theta_2$. To znači da se talas u sredini 2 prelama „ka normali"; taj slučaj imamo uvek kada talas nailazi iz vazduha na površ bilo kog dielektrika. Prelomljeni talas postoji za *sve* uglove θ_1.



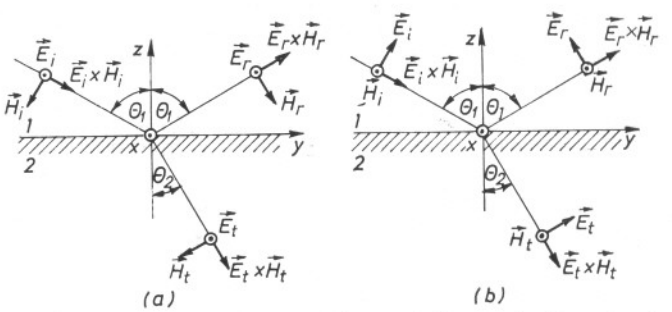
Sl. 13.7. Ekvifazne ravni i pravci prostiranja incidentnog, reflektovanog i prelomljenog talasa.

Ako talas nailazi iz sredine *veće* permitivnosti, tj. ako je $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, tada je $\theta_1 < \theta_2$ Talas u sredini 2 se prelama „od normale". Za ugao θ_1 određen jednačinom

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_T = n_{12} = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \quad \text{(ugao totalne refleksije)} \tag{13}$$

imamo da je $\theta_2 = \pi/2$. Za $\theta_1 > \theta_T$ ugao θ_2 ne može biti realan, pošto za realno θ_2 ne može biti $\sin\theta_2 > 1$. To znači da se celokupna energija reflektuje od razdvojne površi. Ova pojava se naziva *totalna refleksija* i ima mnogo primena. Najpoznatija je kod optičkih prizmi. Manje poznata primena je kod tzv. *dielektričnih talasovoda*. Najprostiji takav talasovod je u vidu trake od dielektrika, kroz koju se talas prostire sukcesivnim totalnim refleksijama od graničnih površi. Na kraju ovoga člana ćemo se osvrnuti na fizičku interpretaciju totalne refleksije.

Sva gornja razmatranja važe za *svaku* polarizaciju primarnog talasa. Pošto se svaki talas može predstaviti u vidu zbira paralelno i normalno polarizovanog talasa, razmotrićemo samo ta dva slučaja (sl. 13.8).



Sl. 13.8. (a) Normalno i (b) paralelno polarizovan incidentni talas koji nailazi pod uglom θ_1 na razdvojnu ravan dve sredine.

Pretpostavimo da su E_{1i}, E_{1r} i E_2 efektivne vrednosti (u opštem slučaju kompleksne) incidentnog, reflektovanog i prelomljenog talasa. Prema graničnim uslovima, ukupne tangencijalne komponente vektora $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{H}$ sa dve strane razdvojne površi moraju biti jednake. U odnosu na referentne smerove prikazane na slici dobijamo

$$E_{1i} + E_{1r} = E_2, \qquad (H_{1i} - H_{1r})\cos\theta_1 = H_2\cos\theta_2$$

za normalnu polarizaciju, a

$$(E_{1i} - E_{1r}) \cos \theta_1 = E_2 \cos \theta_2, \qquad H_{1i} + H_{1r} = H_2$$

za paralelnu polarizaciju. Razume se, prema Snelovom zakonu (11)

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \frac{1}{n_{12}} \sqrt{n_{12}^2 - \sin^2 \theta_1}. \tag{14}$$

Pošto je $H_{1i} = E_{1i}/Z_1$, $H_{1r} = E_{1r}/Z_1$ i $H_2 = E_2/Z_2$, iz dva pretposlednja para jednačina možemo eliminisati H_{1i}, H_{1r} i H_2 i odrediti koeficijente refleksije R_n i R_p, i koeficijente transmisije T_n i T_p, koji odgovaraju ovim polarizacijama:

$$R_n = \left(\frac{E_{1r}}{E_{1i}}\right)_n = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}, \tag{15}$$

$$T_n = \left(\frac{E_2}{E_{1i}}\right)_n = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}, \tag{16}$$

$$R_p = \left(\frac{E_{1r}}{E_{1i}}\right)_p = \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}, \tag{17}$$

$$T_p = \left(\frac{E_2}{E_{1i}}\right)_p = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}. \tag{18}$$

Koeficijenti $R_n, \ldots, T_p$ nazivaju se *Frenelovi koeficijenti* (Augustin Fresnel, 1788—1827, francuski fizičar).

Ovi izrazi su opšti. Ako su sredine 1 i 2 savršeni dielektrici, Z_1 i Z_2 su realni, te su realni i $R_n, \ldots, T_p$. To znači da su E_{1r} i E_{1i}, odnosno E_2 i E_{1i}, tada bilo u fazi, bilo u protivfazi. Ako je jedna od sredina nesavršen dielektrik, koeficijenti $R_n, \ldots, T_p$ su kompleksni. Tada komponente polja tri talasa uz razdvojnu ravan nisu u fazi (ili protivfazi). Na takav, složeniji slučaj osvrnućemo se u sledećem odeljku.

Kada su dve sredine savršeni dielektrici i $\mu_1 = \mu_2$, tada je $Z_1/Z_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} = n_{12}$. Izrazi (15) — (18) se stoga mogu napisati u obliku

$$R_n = \frac{\cos \theta_1 - n_{12} \cos \theta_2}{\cos \theta_1 + n_{12} \cos \theta_2}, \quad T_n = \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + n_{12} \cos \theta_2} \quad (\mu_1 = \mu_2), \tag{19}$$

$$R_p = \frac{n_{12} \cos \theta_1 - \cos \theta_2}{n_{12} \cos \theta_1 + \cos \theta_2}, \quad T_p = \frac{2 \cos \theta_1}{n_{12} \cos \theta_1 + \cos \theta_2} \quad (\mu_1 = \mu_2), \tag{20}$$

gde je $\cos \theta_2$ dat jednačinom (14). Analizirajmo detaljnije ove izraze.

Prema Snelovom zakonu je $n_{12} = \sin \theta_1 / \sin \theta_2$. Otuda R_n ne može biti jednako nuli, pošto bi to zahtevalo da istovremeno bude $n_{12} = \cos \theta_1 / \cos \theta_2$, što nije moguće. Ali R_p *može* biti nula, i to kada je $\cos \theta_2 = n_{12} \cos \theta_1$. Prema jednačini (14) nalazimo da to odgovara uglu θ_1 određenom jednačinom

$$n_{12}^4 \cos^2 \theta_1 = n_{12}^2 - \sin^2 \theta_1.$$

Pošto je $1/\cos^2\theta_1 = 1 + \mathrm{tg}^2\,\theta_1$, dobijamo

$$n_{12}^4 = n_{12}^2\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\theta_1) - \mathrm{tg}^2\,\theta_1,$$

ili

$$n_{12}^2\,(n_{12}^2 - \mathrm{tg}^2\,\theta_1) = n_{12}^2 - \mathrm{tg}^2\,\theta_1.$$

Odavde je tangens ugla θ_1 pri kome, *pri paralelnoj polarizaciji*, iščezava reflektovani talas,

$$\mathrm{tg}\,\theta_1 = \mathrm{tg}\,\theta_B = n_{12} \qquad \text{(Brusterov ugao).} \tag{21}$$

Ugao θ_B se naziva *polarizacioni* ili *Brusterov ugao* (David Brewster, 1781—1868, škotski fizičar). Ako talas koji ima i normalnu i paralelnu komponentu vektora $\boldsymbol{E}$ naiđe pod Brusterovim uglom na površ dielektrika, reflektuje se samo normalno polarizovana komponenta. Ako na putu toga reflektovanog talasa opet postavimo ploču od dielektrika, ali tako da je talas u odnosu na nju *paralelno* polarizovan, reflektovani talas iščezava. Upravo ovakvu pojavu u optici je otkrio Bruster početkom prošlog veka.

Vratimo se sada na totalnu refleksiju. Neka je $\sin\theta_1 > n_{12}$. U tom slučaju je $\cos\theta_2$ u jednačini (14) imaginaran,

$$\cos\theta_2 = \pm\frac{\mathrm{j}}{n_{12}}\sqrt{\sin^2\theta_1 - n_{12}^2} = \pm\,\mathrm{j}f\,(\theta_1, n_{12}). \tag{22}$$

Prema jednačinama (19) i (20) zaključujemo da je tada $|R_n| = 1$ i $|R_p| = 1$. To znači da se celokupna energija talasa reflektuje od razdvojne površi.

U ustaljenom prostoperiodičnom stanju, u sredini 2 ipak *postoji* elektromagnetsko polje. Na primer, prema jednačinama (21) i (22) člana 12.3.4 (str. 285) i sl. 13.8a, za normalnu polarizaciju u sredini 2 postoji talas oblika

$$\boldsymbol{E}_t = E_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2(y\sin\theta_1 - z\cos\theta_2)}\,\boldsymbol{i}_x.$$

Pošto je, po Snelovom zakonu, $\sin\theta_2 = n_{21}\sin\theta_1$, prema jednačini (22) dalje dobijamo

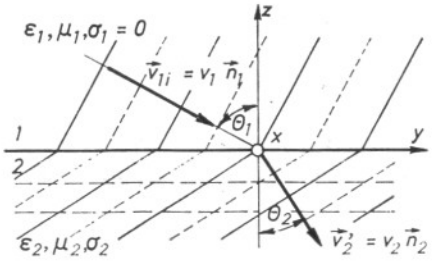
$$\boldsymbol{E}_t = E_2\,\mathrm{e}^{\beta_2 f(\theta_1, n_{12})z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 n_{21} y\sin\theta_1}\,\boldsymbol{i}_x.$$

Predznak „plus" prvog eksponenta smo usvojili iz fizičkih razloga: talas ne može neograničeno rasti po amplitudi za $z \to -\infty$.

Poslednji izraz kaže da u sredini 2 postoji specifičan talas. Ravni jednake amplitude (koja *opada* sa porastom $|z|$) su ravni $z = \text{const}$, a ravni jednake faze su ravni $y = \text{const}$. Takav talas se naziva *netransverzalan talas*. Uočimo da brzina prostiranja faze (ekvifaznih ravni) u sredini 2 *nije* jednaka ω/β_2. Dakle, *brzina prostiranja faze netransverzalnih talasa nije data istim izrazom kao za transverzalne talase.*

***13.4. Odbijanje i prelamanje talasa na ravnoj razdvojnoj površi dielektrika i poluprovodnika. Snelov zakon u kompleksnom obliku.** Pretpostavimo da je sredina 1 iz koje nailazi primarni talas savršen dielektrik (parametara ε_1 i μ_1), a sredina 2 poluprovodnik (parametara ε_2, μ_2 i σ_2). To je aproksimacija

čestih slučajeva koji se sreću, na primer kada talas nailazi iz vazduha na približno ravnu površ zemlje ili vode, i slično. Ugao prelamanja je opet određen Snelovim zakonom (11) prethodnog odeljka (uz dopunu koja će niže biti objašnjena). Ali, to je sada ugao normale na *ekvifazne ravni* u sredini 2, koje se ne *poklapaju* sa ravnima iste amplitude. Naime, ravni jednake amplitude su određene dužinom puta talasa kroz sredinu sa gubicima (sl. 13.9). Dakle, talas u sredini 2 je netransverzalnog tipa (a videli smo šta to fizički znači). Samo ako je $\theta_1 = 0$, te i $\theta_2 = 0$, ravni jednake faze i jednake amplitude u sredini 2 se poklapaju.



Sl. 13.9. Ekvifazne ravni (puno i tačkasto) u sredini 1 se poklapaju sa ravnima iste amplitude. U poluprovodnoj sredini 2 ravni jednake amplitude (isprekidane) su paralelne razdvojnoj površi, pošto njih određuje dužina puta kroz sredinu sa gubicima.

Brzina prostiranja faze talasa jednaka je ω/β bez obzira da li sredina ima gubitaka ili ne. Ali, taj izraz važi samo za transverzalan talas. U slučaju netransverzalnog talasa, brzina prostiranja faze *nije* jednaka ω/β — to smo videli na primeru totalne refleksije. Prema tome, istina je da u slučaju na sl. 13.9 Snelov zakon glasi, kao i ranije, $\sin\theta_1/\sin\theta_2' = v_1/v_2'$, ali ne znamo kako se izračunava brzina prostiranja faze v_2' netransverzalnog talasa u poluprovodnoj sredini. To se može dobiti iz tzv. Snelovog zakona u kompleksnom obliku, koji ćemo sada izvesti.

Pretpostavimo, zbog opštosti, da su obe sredine, 1 i 2, poluprovodne. Neka su kompleksni koeficijenti prostiranja ravnih talasa u dve sredine γ_1, odnosno γ_2. Pretpostavimo da iz sredine 1, pod uglom θ_1 prema normali, nailazi ravan transverzalan talas. Prema jednačinama (21) i (22) člana 12.3.4, sve komponente talasa u sredini 1 su karakterisane faktorom oblika (v. sl. 13.9)

$$e^{-\gamma_1 \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{r}} = e^{\gamma_1(y\sin\theta_1 - z\cos\theta_1)}. \tag{1}$$

Pošto je $\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1$, vidimo da se ravni jednake faze i jednake amplitude u sredini 1 poklapaju.

Pretpostavimo da je moguće netransverzalan talas u sredini 2 predstaviti u istom obliku, tj. da su sve komponente talasa karakterisane faktorom

$$e^{-\gamma_2 \boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{r}} = e^{-\gamma(y\sin\theta_2 - z\cos\theta_2)}. \tag{2}$$

Talas ovoga oblika može biti netransverzalan, pod uslovom da je ugao θ_2 kompleksan. U to se možemo uveriti sledećim rezonovanjem. Ako je θ_2 kompleksno, tada su i $\sin\theta_2 = a + jb$ i $\cos\theta_2 = c + jd$ kompleksni. Prema tome, jednačina (2) bi tada bila oblika

$$e^{-\gamma_2 \boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{r}} = e^{-(\alpha_2 + j\beta_2)[y(a+jb) - z(c+jd)]} =$$

$$= e^{-\alpha_2(ay - cz) + \beta_2(by - dz)}\, e^{-j[\beta_2(ay - cz) + \alpha_2(by - dz)]}.$$

Ravni jednake amplitude se dobijaju izjednačavanjem prvog eksponenta sa konstantom, a ravni jednake faze izjednačavanjem sa konstantom izraza u uglastoj zagradi drugog eksponenta. To su neparalelne ravni, pa je talas netransverzalan.

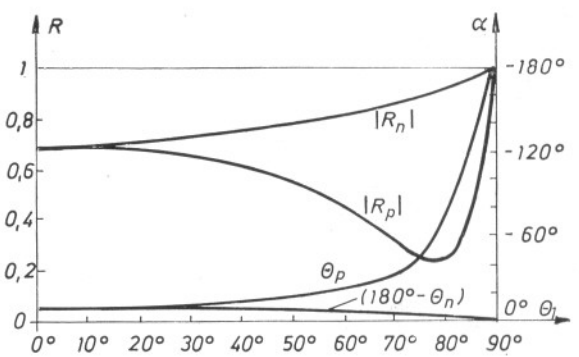
Ako je prostiranje za sve komponente talasa u sredini 1 i sredini 2 karakterisano faktorom (1) odnosno (2), granični uslovi u ravni $z = 0$ (razdvojna ravan), *ma kakvi oni bili*, mogu biti u svakom trenutku zadovoljeni samo ako su, za $z = 0$, eksponenti izraza (1) i (2) međusobno jednaki. Tako dobijamo sledeću vezu između uglova θ_1 i θ_2:

$$\gamma_1 \sin \theta_1 = \gamma_2 \sin \theta_2 \qquad \text{(Snelov zakon u kompleksnom obliku).} \tag{3}$$

Ova jednačina predstavlja Snelov zakon u kompleksnom obliku. U slučaju savršenih dielektrika, jednačina (3) prelazi u ranije izvedeni Snelov zakon.

Reflektovani talas u sredini 1 se određuje pomoću obrazaca (14), (15) i (17) prethodnog odeljka. Sada su oba koeficijenta refleksije (kao i koeficijenti transmisije) *kompleksni*. To znači da reflektovani i primarni talas na razdvojnoj ravni nisu u fazi (ili protivfazi). Stoga se talas koji nije paralelno ili normalno polarizovan odbija od razdvojne ravni kao *eliptički polarizovan talas*.

Koeficijenti refleksije R_n i R_p zavise od učestanosti i parametara sredina 1 i 2 (koji, sa svoje strane, zavise bar u izvesnoj meri od učestanosti). Oni se mogu izračunati za željeni ugao θ_1 ako se imaju u vidu jednačine (14), (15) i (17) prethodnog odeljka, i u njima koristi *kompleksna* impedansa sredine 2. Kao primer, na sl. 13.10 skicirana je zavisnost modula i argumenta koeficijenta refleksije $R_p = |R_p| e^{j\theta_p}$ i $R_n = |R_n| e^{j\theta_n}$ od ugla θ_1, za $\varepsilon_2 = 15\varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$ i $\sigma_2 = 10^{-2}$ S/m (vlažna zemlja), sredinu 1 vazduh i učestanost $f = 10$ MHz. Vidi se da $|R_p|$ ima minimum, koji odgovara nekom pseudo-Brusterovom uglu.



Sl. 13.10. Primer zavisnosti modula i argumenta koeficijenta refleksije pri nailasku ravnog talasa iz vazduha na ravnu površ Zemlje parametara $\varepsilon_2 = 15\varepsilon_0$, $\sigma_2 = 10^{-2}$ S/m i $\mu_2 = \mu_0$, pri učestanosti $f = 10$ MHz, u funkciji ugla θ_1 nailaska primarnog talasa.

Kao poseban slučaj, kada je $\sigma_2 \gg \omega\varepsilon_2$ i $|Z_2| \ll 1$ (dobar provodnik), pomoću jednačina (15) i (17) prethodnog odeljka lako nalazimo da je $R_n \simeq -1$ i $R_p \simeq 1$ za sve uglove θ_1. Imajući u vidu da se to odnosi na referentne smerove prikazane na sl. 13.8, možemo reći da pri refleksiji od ravne površi dobrog provodnika talas ne menja amplitudu, da menja fazu za π u slučaju normalne polarizacije, a da ne menja fazu u slučaju paralelne polarizacije.

13.5. Odbijanje i prelamanje ravnih talasa u slučaju jonosfere. U odeljku 12.6 analizirali smo uslove prostiranja ravnih talasa kroz homogene jonizovane gasove. Zaključili smo da se, u odsustvu stranog magnetskog polja, uticaj jonizovanog gasa može svesti na promenu permitivnosti,

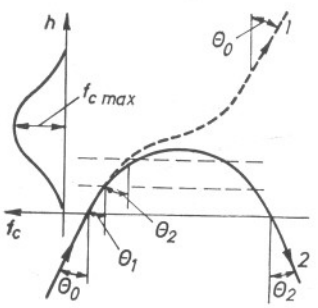
$$\varepsilon' = \varepsilon_0 (1 - f_c^2/f^2). \tag{1}$$

[v. jednačine (2) i (3) odeljka 12.6]. U ovom odeljku ćemo ispitati kako se ravan talas prostire kroz jonizovan gas čija se ekvivalentna permitivnost ε' (odnosno koncentracija elektrona) kontinualno menja počev od granične ravni sloja. Upravo takav slučaj imamo približno kod Zemljine jonosfere.

Kao što smo pomenuli u odeljku 12.6, jonosfera je jonizovan sloj atmosfere koji se proteže negde između 50 km i 500 km od površi Zemlje. Koncentracija elektrona se menja sa visinom i zavisi vrlo mnogo od doba dana, a dosta od doba godine, geografske širine i trenutnog intenziteta Sunčeve aktivnosti.

U toku dana, koncentracija elektrona sa promenom visine pokazuje izvesne pravilnosti, tako da je jonosferu moguće podeliti u tome smislu u četiri „sloja". Granice između tih slojeva su sasvim proizvoljne, a slojevi se obeležavaju redom sa D, E, F_1 i F_2 (računato od površi Zemlje). Visina sloja D je 50—70 km, sloja E je 100—150 km, sloja F_1 oko 200 km i sloja F_2 između 250 km i 300 km. Noću slojevi D i E praktično iščezavaju, a slojevi F_1 i F_2 se stapaju u tzv. sloj F, na visini od oko 250 km do oko 400 km. Red veličine kritične učestanosti za maksimume jonizacije slojeva E, F_1, F_2 i F je, redom, oko 3—4 MHz, 4—5 MHz, 6—8 MHz i 3—5 MHz. Najniži sloj, D, u kome su sudari elektrona sa neutralnim atomima najčešći, je dominantan u pogledu slabljenja talasa. Zainteresovan čitalac može naći više informacija o jonosferi u lit. br. 79 navedenoj na kraju knjige.

Zamislimo sada da talas učestanosti f nailazi pod uglom θ_0 prema normali na donju graničnu površ jonosfere (zbog jednostavnosti usvajamo da je ravna), kao na sl. 13.11. Pretpostavljena zavisnost kritične učestanosti od visine skicirana je na slici. Jonosferu možemo zamisliti u vidu mnogo tankih slojeva konstantne



Sl. 13.11. Skica prostiranja talasa kroz jonosferu.

koncentracije, kao što je na slici nagovešteno. Primenom Snelovog zakona (11) i (12) odeljka 13.3 dobijamo jednačine

$$\sin\theta_0/\sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_1'/\varepsilon_0}, \qquad \sin\theta_1/\sin\theta_2 = \sqrt{\varepsilon_2'/\varepsilon_1'}, \ldots,$$

gde ε_1', ε_2', ... označavaju ekvivalentne permitivnosti sukcesivnih slojeva. Vidimo da se ugao θ' na bilo kojoj visini može izračunati iz jednačine

$$\sin\theta_0/\sin\theta' = \sqrt{\varepsilon'/\varepsilon_0},$$

koja se dobija množenjem levih i desnih strana gornjih jednačina sve do sloja ekvivalentne permitivnosti ε'. Odavde i iz jednačine (1) tako dobijamo

$$\sin\theta' \sqrt{1 - f_c^2/f^2} = \sin\theta_0. \tag{2}$$

Ako su učestanost f i ugao θ_0 takvi da je $\theta < \pi/2$ u tački u kojoj je kritična učestanost $f_c = f_{cmax}$, talas će se poviti, ali će proći kroz jonosferu i iz nje izaći tačno pod uglom θ_0 (slučaj 1 na sl. 13.11). Ali ako su f i θ_0 takvi da je $\theta' = \pi/2$ pre visine u kojoj je $f_c = f_{cmax}$, talas se reflektuje od jonosfere (putanja 2 na slici), i iz nje izlazi opet pod uglom θ_0. U tom slučaju talas dospeva do visine na kojoj je jonizacija takva da je

$$\sqrt{1 - f_c^2/f^2} = \sin\theta_0,$$

odakle nalazimo

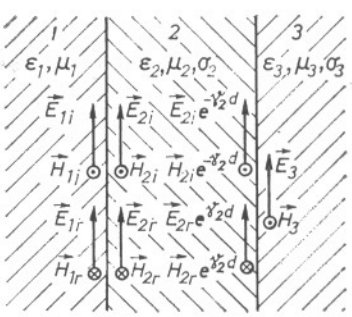
$$f_c = f\cos\theta_0. \tag{3}$$

Za $\theta_0 = 0$ (talas nailazi upravno na jonosferu), $f_c = f$. Ova se činjenica koristi za „sondiranje" jonosfere.

Pošto se f_{cmax} kreće, grubo, između 3 MHz i 8 MHz, talas učestanosti niže od oko 3 MHz ne može proći kroz jonosferu. Imajući u vidu jednačinu (3), jonosfera reflektuje i talase učestanosti veće od f_{cmax} kada oni nailaze na nju pod dovoljno velikim uglom (u odnosu na normalu). Tako se jonosfera i površ Zemlje mogu koristiti kao „talasovod" i talasi dovoljno niske učestanosti voditi uzastopnim refleksijama do udaljene tačke površi Zemlje. Za vezu sa satelitima, međutim, moraju se koristiti talasi znatno više učestanosti, koji pod praktično svim uglovima prolaze kroz jonosferu.

***13.6. Neki složeniji primeri refleksije ravnih talasa.** U prethodnim odeljcima analizirali smo najjednostavnije (ali i najvažnije) slučajeve odbijanja i prelamanja ravnih talasa. Pomoću osnovnih formula koje smo izveli moguće je, međutim, doći i do niza drugih korisnih rezultata. Ovaj odeljak ima za cilj da ukratko izvede neke od njih.

****13.6.1. Dve sredine razdvojene poluprovodnim slojem.*** Posmatrajmo prvo slučaj skiciran na sl. 13.12. Ravan talas nailazi iz savršenog dielektrika 1 uprav-



Sl. 13.12. Poluprovodni sloj 2 koji razdvaja dielektrik 1 od poluprovodne sredine 3.

no na poluprovodni sloj 2 debljine d, iza koga je homogen poluprovodnik. Odredimo koeficijent refleksije (za vektor $\boldsymbol{E}$) u ovom slučaju.

Zadatak ćemo rešiti na dva načina: korišćenjem graničnih uslova koje moraju da zadovoljavaju električno i magnetsko polje na graničnim površima, i posmatranjem uzastopnih odbijanja i transmisije talasa koji se prostire u sredini 2.

Neka je E_{1r} amplituda reflektovanog talasa u sredini 1. I u sredini 2 postoji i direktni i reflektovani talas, ali amplitude tog talasa nisu u svakoj tački iste, zbog slabljenja koje unosi sredina. Obeležimo sa E_{2i}, odnosno sa E_{2r}, efektivne vrednosti direktnog i reflektovanog talasa u sredini 2, neposredno uz razdvojnu površ sredina 1 i 2. Ako sa γ_2 obeležimo kompleksni koeficijent prostiranja sredine 2, efektivne vrednosti direktnog i reflektovanog talasa u sredini 2 neposredno uz razdvojnu površ sredina 2 i 3 će tada biti $E_{2i}\,e^{-\gamma_2 d}$ i $E_{2r}\,e^{+\gamma_2 d}$. Na kraju, obeležimo sa E_3 efektivnu vrednost električnog polja talasa koji se prostire u sredini 3, neposredno uz razdvojnu površ sredina 2 i 3.

Na sl. 13.12 su naznačeni referentni smerovi svih gore nabrojanih komponenata i odgovarajući referentni smerovi vektora $\boldsymbol{H}$ (proizvod $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ mora uvek biti u smeru prostiranja talasa). Prema graničnom uslovu za tangencijalne komponente električnog i magnetskog polja, zbir komponenata polja sa jedne strane razdvojne površi mora biti jednak zbiru komponenata sa druge strane površi. Tako dobijamo jednačine

$$E_{1i} + E_{1r} = E_{2i} + E_{2r}, \tag{1}$$

$$H_{1i} - H_{1r} = H_{2i} - H_{2r}, \tag{2}$$

$$E_{2i}\,e^{-\gamma_2 d} + E_{2r}\,e^{\gamma_2 d} = E_3, \tag{3}$$

$$H_{2i}\,e^{-\gamma_2 d} - H_{2r}\,e^{\gamma_2 d} = H_3. \tag{4}$$

Ako u ove jednačine stavimo $H = E/Z$ sa odgovarajućim indeksima, umesto (2) i (4) dobijamo jednačine

$$(E_{1i} - E_{1r})/Z_1 = (E_{2i} - E_{2r})/Z_2, \tag{5}$$

$$(E_{2i}\,e^{-\gamma_2 d} - E_{2r}\,e^{\gamma_2 d})/Z_2 = E_3/Z_3. \tag{6}$$

Iz jednačina (1), (3), (5) i (6) se mogu eliminisati E_{2i}, E_{2r} i E_3. Tako se, posle dužeg, ali jednostavnog, računa dobija da je odnos efektivnih vrednosti reflektovanog i direktnog (incidentnog) talasa u sredini 1

$$\frac{E_{1r}}{E_{1i}} = \frac{Z_e - Z_1}{Z_e + Z_1}, \tag{7}$$

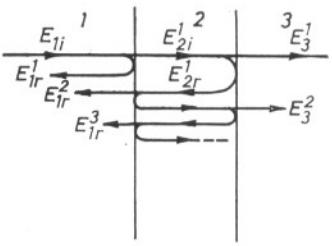
gde je

$$Z_e = Z_2 \frac{Z_2 \operatorname{sh} \gamma_2 d + Z_3 \operatorname{ch} \gamma_2 d}{Z_2 \operatorname{ch} \gamma_2 d + Z_3 \operatorname{sh} \gamma_2 d}. \tag{8}$$

Poređenjem (7) sa jednačinom (4) člana 13.3.1 zaključujemo da Z_e predstavlja neku vrstu ekvivalentne impedanse sredina 2 i 3 u odnosu na sredinu 1.

Izvešćemo sada jednačinu (7) i koristeći se fizičkom predstavom uzastopnih odbijanja i transmisije talasa u sredini 2. Posmatrajmo talas koji iz sredine 1 nailazi u sloj 2. Jedan deo talasa se reflektuje, drugi se prenosi. Na sl. 13.13 su ta dva talasa označena sa E^1_{1r} i E^1_{2i}. Talas E^1_{2i} se prostire kroz sredinu 2, i kada naiđe na kraj

sloja, jedan njegov deo prolazi u sredinu 3 (označen sa E_3^1), a drugi deo (E_{2r}^1) se reflektuje. Taj reflektovani talas se, zatim, ponovo delimično prenosi, a delimično reflektuje na razdvojnoj površi sredina 2 i 1 itd. Ukupne efektivne vrednosti pojedinih komponenata su jednake zbiru svih ovih delimičnih vrednosti, koje ćemo sada odrediti.



Sl. 13.13. Određivanje reflektovanog i transmitovanog talasa posmatranjem uzastopnih refleksija i transmisija talasa.

Neka je E_{1i} efektivna vrednost incidentnog talasa u sredini 1. Tada se, prema jednačini (4) člana 13.3.1, od razdvojnog sloja sredina 1 i 2 odbija talas čija je efektivna vrednost

$$E_{1r}^1 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} E_{1i} = R_{12} E_{1i},$$

a u sredinu 2 prolazi talas efektivne vrednosti

$$E_{2i}^1 = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} E_{1i} = T_{12} E_{1i}.$$

Kada talas E_{2i}^1 dospe do razdvojne površi sredina 2 i 3, njegova vrednost opadne na $T_{12}\,e^{-\gamma_2 d} E_{1i}$. U sredinu 3 prolazi deo tog talasa

$$E_3^1 = (T_{12}\,e^{-\gamma_2 d} E_{1i})\, T_{23},$$

a reflektuje se talas efektivne vrednosti

$$E_{2r}^1 = (T_{12}\,e^{-\gamma_2 d} E_{1i})\, R_{23}.$$

Deo oslabljenog talasa E_{2r}^1 se zatim prenosi u sredinu 1, a deo ponovo reflektuje itd. Prema tome, reflektovani talas u sredini 1 se može napisati u obliku zbira (u prvom zbiru su, zbog jasnoće, faktori pojedinih sabiraka napisani onim redom kojim se, praćenjem kretanja talasa, javljaju)

$$\begin{aligned} E_{1r}/E_{1i} &= R_{12} + T_{12}\,e^{-\gamma_2 d}\, R_{23}\,e^{-\gamma_2 d}\, T_{21} + \\ &+ T_{12}\,e^{-\gamma_2 d}\, R_{23}\,e^{-\gamma_2 d}\, R_{21}\,e^{-\gamma_2 d}\, R_{23}\,e^{-\gamma_2 d}\, T_{21} + \ldots = R_{12} + \\ &+ T_{12}\, T_{21}\, R_{23}\,e^{-2\gamma_2 d}[1 + R_{21}\, R_{23}\,e^{-2\gamma_2 d} + (R_{21}\, R_{23}\,e^{-2\gamma_2 d})^2 + \ldots] = \\ &= R_{12} + \frac{T_{12}\, T_{21}\, R_{23}\,e^{-2\gamma_2 d}}{1 - R_{21}\, R_{23}\,e^{-2\gamma_2 d}}. \end{aligned}$$

Kada se u ovaj izraz stavi $R_{21} = -R_{12}$ [v. jednačinu (4) člana 13.3.1], dobija se da je odnos efektivnih vrednosti reflektovanog i incidentnog talasa u sredini 1

$$\frac{E_{1r}}{E_{1i}} = R_{12} + \frac{T_{12}\, T_{21}\, R_{23}\,e^{-2\gamma_2 d}}{1 + R_{12}\, R_{23}\,e^{-2\gamma_2 d}}. \tag{9}$$