

Услов квазистационарности поља у фреквенцијском домену

У хомогеном диелектрику без губитака, пермитивности ϵ и пермеабилности μ , израз за магнетски вектор–потенцијал у фреквенцијском домену гласи

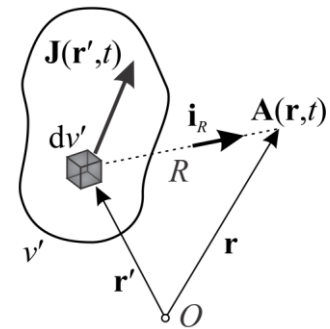
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-j\beta R}}{R} dv', \quad (1)$$

где је $\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$, \mathbf{r}' вектор положаја струјног елемента, \mathbf{r} вектор положаја тачке у којој се тражи магнетски вектор–потенцијал и $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Када је $\beta R_{\max} \ll 1$ (где је R_{\max} максимална димензија посматраног домена), експоненцијални фактор под знаком интеграла је приближно једнак јединици, те се кашњење може занемарити. У том случају, израз за магнетски вектор–потенцијал је исти као у статичком случају.

Услов квазистационарности у временском домену

У временском домену, израз за магнетски вектор–потенцијал гласи

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dv', \quad (2)$$



где је $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ тзв. брзина простирања у посматраном диелектрику.

Приближан израз за магнетски вектор–потенцијал може се добити развојем израза за густину струје у Тејлоров ред. Тејлоров развој произвољне функције f у околини тачке $x = 0$ гласи

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad (3)$$

где $f^{(n)}(0)$ представља n -ти извод функције f у тачки $x = 0$.

Тејлоровим развојем $\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)$ у околини тачке $R = 0$, и применом (3), добијамо

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{\partial R^n} \Big|_{R=0} R^n. \quad (4)$$

Ради лакше анализе, сматрамо да је брзина промене струје умерена, те су нам довољна су прва два члана реда (4), тј.

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) \approx \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) + \left. \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) \right|_{R=0} R. \quad (5)$$

Имајући у виду да је

$$\left. \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) \right|_{R=0} = \frac{\partial \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{\partial \left(t - \frac{R}{c}\right)} \frac{\partial \left(t - \frac{R}{c}\right)}{\partial R} \Bigg|_{R=0} = \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \left(-\frac{1}{c}\right), \quad (6)$$

уврштавањем (6) у (5) добија се

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) \approx \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) + \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \left(-\frac{R}{c}\right), \quad (7)$$

односно

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) \approx \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) + \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} (-\tau), \quad (8)$$

где је $\tau = \frac{R}{c}$ време потребно да се промена јачине извора у тачки \mathbf{r}' осети у тачки \mathbf{r} .

Уколико је испуњено

$$|\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)| \gg \left| \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \right| \tau_{\max}, \quad (9)$$

где је τ_{\max} највеће могуће кашњење у посматраном домену, први члан суме (8) је значајно већи од другог. У том случају, магнетски вектор–потенцијал се рачуна на исти начин као у стационарном магнетском пољу

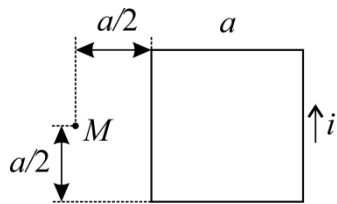
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{R} dv', \quad (10)$$

с том разликом што густина струје није константна, већ се мења у времену.

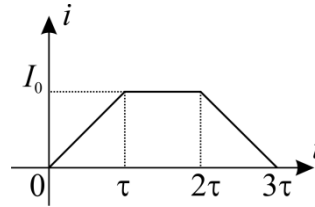
На основу (8) закључујемо да се може догодити да у једном интервалу времена поље буде квазистационарно, а у другом не.

Сада ћемо претходну дискусију применити на примеру мале струјне контуре, побуђене струјним импулсом.

Задатак 206: Извор електромагнетских сметњи може се апроксимирати квадратном контуром дужине странице $a = 1 \text{ cm}$ (вредност за a је измењена у односу на 206!), која се налази у вакууму (слика 1). У контури постоји временски променљива струја, чија јачина, i , има облика импулса приказаног на слици 2, при чему је $I_0 = 10 \text{ A}$ и $\tau = 10 \text{ ns}$. Израчунати вектор индукованог електричног поља (у 206 се тражи и магнетско поље!) које ова контура ствара у тачки M на слици 1.



Слика 1



Слика 2

Решење:

На основу (9), услов квазистационарности у проводнику са линијском струјом своди се на $|i(\mathbf{r}', t)| \gg \left| \frac{\partial i(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \right| \tau_{\max}$. У посматраном примеру, јачина струје је иста у свим тачкама контуре, те претходни услов постаје $|i(t)| \gg \left| \frac{\partial i(t)}{\partial t} \right| \tau_{\max}$. Зависност јачине струје у контури од времена дата је аналитичким изразима

$$i(t) = \begin{cases} I_0 t / \tau, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \tau < t \leq 2\tau \\ I_0(3\tau - t) / \tau, & 2\tau < t \leq 3\tau \end{cases},$$

одакле следи да је брзина промене струје

$$\frac{di}{dt} = \begin{cases} I_0 / \tau, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \tau < t \leq 2\tau \\ -I_0 / \tau, & 2\tau < t \leq 3\tau \end{cases}.$$

Испитујемо да ли је у тачки M испуњен услов квазистационарности поља. У односу на посматрану тачку M , најудаљеније тачке на контури су горње и доње десно теме. Максимално растојање R , стога, износи

$$R_{\max} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} a \approx 1,6 \text{ cm},$$

а одговарајуће кашњење је ($c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

$$\tau_{\max} = \frac{R_{\max}}{c_0} \approx 0.05 \text{ ns} = 0.005 \tau.$$

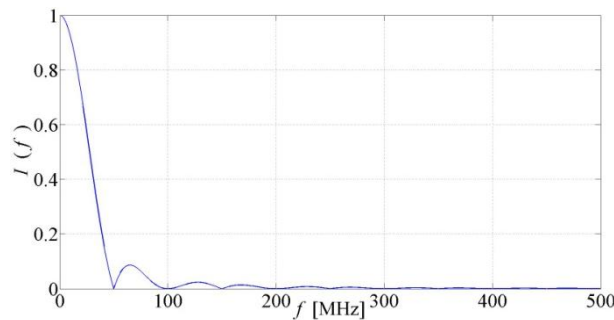
Да би поље било квазистационарно, у сваком тренутку би требало да важи

$$i(t) \gg \left| \frac{\partial i(t)}{\partial t} \right| \tau_{\max}.$$

У интервалу $0 \leq t \leq \tau$, поље је квазистационарно када важи

$$\frac{I_0 t}{\tau} \gg \frac{I_0}{\tau} \tau_{\max} \Rightarrow t \gg t_{\max} = 0.005 \tau,$$

што је испуњено током највећег дела интервала. У интервалу $\tau < t \leq 2\tau$, струја је константна те је поље аутоматски квазистационарно. Коначно, анализа у интервалу $2\tau < t \leq 3\tau$ даје исти резултат као у интервалу $0 \leq t \leq \tau$.



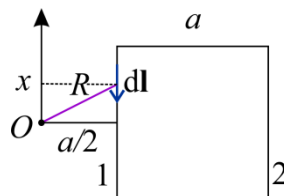
Слика 4

Показаћемо на истом примеру, како би изгледала анализа у фреквенцијском домену. На слици 4, приказали смо Фуријеову трансформацију струјног импулса са слике 2. Видимо да су амплитуде компоненти на учестаностима већим од $f = f_{\max} = 100$ MHz практично занемарљиве. (До истог резултата може да се дође и приближном анализом која каже да је максимална учестаност импулса ширине τ , приближно $f_{\max} = 1/\tau$.) Услов квазистационарности гласи $\beta R_{\max} = 2\pi f_{\max} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} R_{\max} \ll 1$, одакле се добија $f_{\max} \ll 2984$ MHz, што је испуњено, те је поље приближно квазистационарно.

Магнетски вектор–потенцијал се одређује из израза

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}}{R},$$

где област интеграције може да се подели на четири сегмента који се поклапају са страницама контуре. Због симетрије, доприноси хоризонталних сегмената се потиру.



Слика 5.

Доприноси вертикалних сегмената (означених са 1 и 2 на слици 5) су

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{L_1} \frac{d\mathbf{l}}{R} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{|dx|(-\mathbf{i}_x)}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \mathbf{i}_x \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{(-dx)(-\mathbf{i}_x)}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \mathbf{i}_x \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \\ &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \mathbf{i}_x \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \right| \Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \mathbf{i}_x \ln \frac{\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \mathbf{i}_x \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}}, \text{ и} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{L_2} \frac{d\mathbf{l}}{R} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{|dx|(+\mathbf{i}_x)}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx \mathbf{i}_x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}} = \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \mathbf{i}_x \ln \frac{\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}}{-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \mathbf{i}_x \ln \frac{1 + \sqrt{10}}{-1 + \sqrt{10}}, \text{ па је магнетски вектор-потенцијал у} \end{aligned}$$

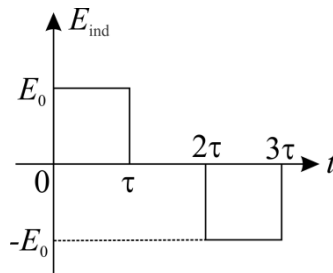
тачки M

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \mathbf{i}_x \left(\ln \frac{1 + \sqrt{10}}{-1 + \sqrt{10}} - \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \right), \text{ а вектор јачине индукованог електричног поља}$$

у тачки M

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{di}{dt} \mathbf{i}_x \left(\ln \frac{1 + \sqrt{10}}{-1 + \sqrt{10}} - \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \right).$$

График индукованог електричног поља дат је на слици 6, при чему је $E_0 = 110,8 \text{ V/m}$. Индуковано електрично поље је јако и има облик импулса. Због тога може постојати знатно преслушавање између посматране контуре и околних кола.



Слика 6.