

# ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОФ, ОС, ИР)

12. јануар 2012.

**Напомене.** Испит траје 180 минута. Није дозвољено напуштање сале 60 минута од почетка испита. Писати искључиво хемијском оловком. Дозвољена је употреба непрограмабилних калкулатора. Дозвољена је употреба само овога папира и једне вежбанке, који се морају заједно предати. Питања радити искључиво на овоме папиру, а задатке искључиво у вежбанци. Коначне одговоре на питања и тражена извођења уписати у одговарајуће кућице, уцртати у дијаграме или заокружити понуђене одговоре. Одговори без извођења се неће признати. Вежбанка и овај папир се морају заједно предати. Свако питање носи по 5 поена, а задатак по 20 поена.

**Попунити податке о кандидату у следећој табели. Исте податке написати и на омоту вежбанке.**

ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ (попуњава кандидат)							КОЛОКВИЈУМ				
Индекс година/број		Презиме и име									
/							ИСПИТ				
ПИТАЊА						ЗАДАЦИ			УКУПНО ПОЕНА	ОЦЕНА	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	Укупно	1.	2.			Укупно

## ПИТАЊА

**1.** Запреминска наелектрисања константне густине  $\rho$  распоређена су у ваздуху по домену облика веома дугачког цилиндра, полупречника  $a$ , чија се оса поклапа са  $z$ -осом цилиндричног координатног система. Коришћењем датих израза за просторне изводе и уочавањем симетрије написати Поасонову једначину у тачкама у (а) цилиндру и (б) ван цилиндра.

(а)	(б)
-----	-----

**2.** У веома дугачком цилиндричном проводнику површине попречног пресека  $S = 3\text{cm}^2$ , који се налази у вакууму, постоји стална струја јачине  $I = 2,5\text{A}$ . Проводник је начињен од материјала специфичне проводности  $\sigma = 59\text{MS/m}$ . Израчунати интензитет тангенцијалне компоненте вектора јачине електричног поља, у вакууму, непосредно уз површ проводника.

**3.** У вакууму се налази веома дугачак соленоид са равномерно и густо мотаним завојцима подужне густине  $N'$ . У соленоиду постоји простопериодична струја ефективне вредности  $I$  и високе учестаности  $f$ . (а) Занемарујући ефекат крајева и апроксимирајући соленоид мноштвом приљубљених кружних навојака, израчунати магнетски вектор-потенцијал,  $\mathbf{A}$ , на оси соленоида. (б) Написати везу између вектора магнетске индукције,  $\mathbf{B}$ , и вектора  $\mathbf{A}$  у стационарном магнетском пољу. Да ли се на основу ове везе и познатог вектора  $\mathbf{A}$  на оси соленоида може одредити вектор  $\mathbf{B}$  на оси соленоида? Образложити одговор.

(а)	(б)
-----	-----

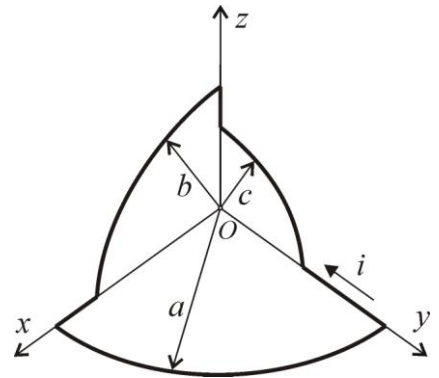
4. Написати математички исказ Поинтингове теореме у комплексном облику и, уз цртеж, објаснити значење појединих чланова.

5. Линијски поларизован простопериодичан TEM талас, ефективне вредности вектора јачине електричног поља  $E$  и учестаности  $f$ , наилази из вакуума нормално на раздвојну површ са савршеним диелектриком релативне пермитивности  $\epsilon_r$ . Одредити изразе за ефективне вредности вектора јачина резултантног електричног и магнетског поља у вакууму.

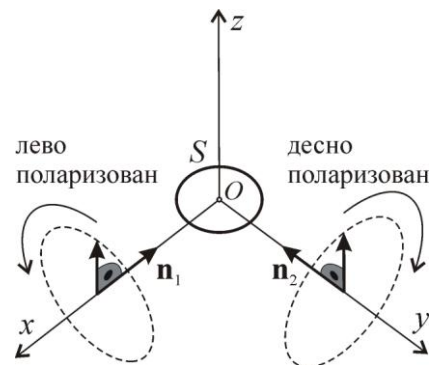
6. Сматрајући да су губици мали, извести израз за комплексни коефицијент простирања равнот TEM таласа, учестаности  $f$ , при простирању кроз хомогену средину која је добар диелектрик, пермитивности  $\epsilon$ , пермеабилности  $\mu$  и специфичне проводности  $\sigma$ .

## ЗАДАЦИ

1. У жичаној контури у вакууму постоји брзопроменљива струје познате јачине  $i = \sqrt{2}I \cos \omega t$ , где су  $I$  и  $\omega$  реалне константе. Контура је сачињена из три лучна дела, познатих полупречника  $a$ ,  $b$  и  $c$ , који леже у равнима  $Oxy$ ,  $Oxz$  и  $Oyz$ , и три праволинијска сегмента који леже на  $x$  оси,  $y$  оси и  $z$  оси усвојеног Декартовог координатног система, као на слици. Одредити израз за комплексног представника вектора магнетске индукције у координатном почетку.



2. Два равна кружно поларизована простопериодична TEM таласа, оба таласне дужине  $\lambda = 2,3\text{m}$ , простиру се кроз ваздух. Први талас се простира у правцу и смеру орта  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{i}_x$ , ефективна вредност вектора јачине електричног поља му је  $E_1 = 0,4\text{V/m}$  и лево је поларизован. Други талас се простира у правцу и смеру орта  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{i}_y$ , ефективна вредност вектора јачине електричног поља му је  $E_2 = 0,7\text{V/m}$  и десно је поларизован. (Смерови обртања вектора поља за леву и десну поларизацију приказани су на слици.) У тренутку  $t=0$  вектор јачине електричног поља првог таласа и вектор јачине магнетског поља другог таласа су, у координатном почетку, у смеру орта  $\mathbf{i}_z$ . (а) Написати изразе за комплексне представнике вектора јачине електричног и магнетског поља сваког од таласа. (б) Израчунати ефективну вредност електромоторне силе индуковане у електрички малој равнот кружној жичаној контури, површине  $S = 3\text{cm}^2$ , која лежи у  $Oxy$  равни а центар јој је у координатном почетку.



У цилиндричном координатном систему је:

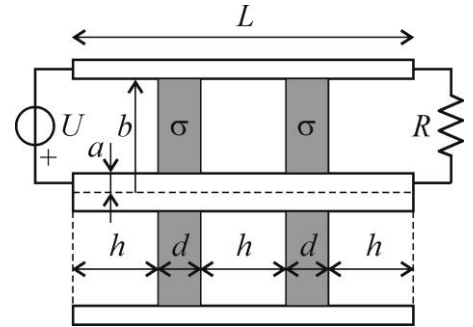
$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{i}_z, \quad \text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

## Додатак из првог дела градива

- ОФ, ОС, ИР -

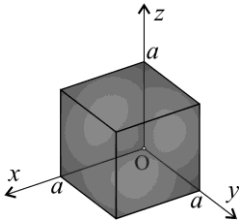
### Задаци

\*3. На улаз правог коаксијалног вода са ваздушним диелектриком, унутрашњег полупречника  $a = 2\text{ cm}$ , спољашњег полупречника  $b = 5\text{ cm}$  и (непознате) дужине  $L$ , прикључен је генератор сталног (непознатог) напона  $U$ , док је на његов крај прикључен отпорник отпорности  $R = 50\Omega$ . Израчунати дебљину  $d$  два идентична диска, унутрашњег полупречника  $a$  и спољашњег полупречника  $b$ , тако да се након њиховог уметања у коаксијални вод, на начин приказан на слици, јачина струје кроз прикључке генератора промени за 15%. Дискови су начињени од линеарног хомогеног немагнетског материјала специфичне проводности  $\sigma = 0,01\text{ S/m}$ , док се проводници коаксијалног вода могу сматрати савршено проводним. Занемарити ефекте крајева.



### Питања

\*7. У коцки од диелектрика дужине стране  $a$ , приказаној на слици, познат је вектор поларизације  $\mathbf{P} = P_0 \frac{xz(z-a)}{a^3} (\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y)$ , где је  $P_0$  константа. Коцка је у вакууму. Одредити расподелу везаних наелектрисања коцке.



\*8. (а) Навести Стоксову теорему и теорему Гаус-Остроградског и објаснити значење појединих чланова. (б) Полазећи од интегралног облика уопштеног Амперовог и уопштеног Гаусовог закона, а користећи се овим двама теоремама, извести диференцијални облик два наведена закона.

(а)	(б)
-----	-----

**ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА И РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА  
ИСПИТА ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОФ, ОС, ИР),  
ОДРЖАНОГ 12. ЈАНУАРА 2012. ГОДИНЕ**

**ПИТАЊА**

1. (a)  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ . (б)  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$ .

2.  $E = 141,2 \mu\text{V/m}$ .

3. (a)  $\mathbf{A} = 0$ . (б)  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . На основу ове везе и познатог вектора  $\mathbf{A}$  на оси соленоида вектор  $\mathbf{B}$  на оси соленоида се не може одредити. За одређивање вектора  $\mathbf{B}$  на оси соленоида потребно је познавати вектор  $\mathbf{A}$  и у околини осе соленоида.

4.  $-\int_V \mathbf{J}_i^* \cdot \mathbf{E} dv = \int_V \sigma E^2 dv + j\omega \int_V (\mu H^2 - \epsilon^* E^2) dv + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S}$ .

5.  $E_{\text{rez}} = E \sqrt{(1 + R \cos(2\beta z))^2 + (R \sin(2\beta z))^2}$ ,  $H_{\text{rez}} = \frac{E}{Z_0} \sqrt{(1 - R \cos(2\beta z))^2 + (R \sin(2\beta z))^2}$ ,

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ,  $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$ ,  $R = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$ ,  $\beta = 2\pi f \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}$ .

6.  $\underline{\gamma} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + j2\pi f \sqrt{\epsilon \mu}$ .

\*7.  $\rho_p = -P_0 \frac{z(z-a)}{a^3}$ ,  $\rho_{ps}(x=a) = P_0 \frac{z(z-a)}{a^2}$ ,  $\rho_{ps}(y=0) = -P_0 \frac{xz(z-a)}{a^2}$ ,  $\rho_{ps}(y=a) = P_0 \frac{xz(z-a)}{a^2}$  на осталим површима  $\rho_{ps} = 0$ .

\*8. (a)  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ ,  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{A} dv$ . (б)  $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ,  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv \Rightarrow \text{div } \mathbf{D} = \rho$ .

**ЗАДАЦИ**

1.  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{8} \left( \frac{1 + j\beta c}{c} e^{-j\beta c} \mathbf{i}_x + \frac{1 + j\beta b}{b} e^{-j\beta b} \mathbf{i}_y + \frac{1 + j\beta a}{a} e^{-j\beta a} \mathbf{i}_z \right)$ ,  $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ .

2. (a)  $\underline{\mathbf{E}}_1 = \frac{E_1}{\sqrt{2}} (j\mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z) e^{j\frac{2\pi}{\lambda} x}$ ,  $\underline{\mathbf{H}}_1 = \frac{E_1}{Z_0 \sqrt{2}} (\mathbf{i}_y - j\mathbf{i}_z) e^{j\frac{2\pi}{\lambda} x}$ ,  $\underline{\mathbf{E}}_2 = \frac{E_2}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_x - j\mathbf{i}_z) e^{j\frac{2\pi}{\lambda} y}$ ,  $\underline{\mathbf{H}}_2 = \frac{E_2}{Z_0 \sqrt{2}} (j\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_z) e^{j\frac{2\pi}{\lambda} y}$ .

(б)  $\epsilon = \frac{\sqrt{2}\pi S}{\lambda} \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 0,47 \text{ mV}$ .

\*3.  $d = \frac{3 \ln \frac{b}{a}}{80\pi \sigma R} = 2,19 \text{ cm}$ .