# ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОФ)

15. јун 2012.

**Напомене.** Испит траје 180 минута. Није дозвољено напуштање сале 60 минута од почетка испита. Писати искључиво хемијском оловком. Дозвољена је употреба непрограмабилних калкулатора. Дозвољена је употреба само овога папира и једне вежбанке, који се морају заједно предати. Питања радити искључиво на овоме папиру, а задатке искључиво у вежбанци. Коначне одговоре на питања и тражена извођења уписати у одговарајуће кућице, уцртати у дијаграме или заокружити понуђене одговоре. Одговори без извођења се неће признати. Вежбанка и овај папир се морају заједно предати. Свако питање носи по 5 поена, а задатак по 20 поена.

**Попунити податке о кандидату у следећој таблици. Исте податке написати и на омоту вежбанке.**

<table>
<tr><td colspan="7">ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ (попуњава кандидат)</td><td colspan="3"></td><td>КОЛОКВИЈУМ</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Индекс<br>година/број</td><td colspan="8">Презиме и име</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">/</td><td colspan="8"></td><td>ИСПИТ</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">ПИТАЊА</td><td colspan="3">ЗАДАЦИ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>Укупно</td><td>1.</td><td>2.</td><td>Укупно</td><td>УКУПНО ПОЕНА</td><td>ОЦЕНА</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

**ПИТАЊА**

**1.** Запреминска наелектрисања константне густине $\rho$ распоређена су у ваздуху по домену облика веома дугачког цилиндра, полупречника $a$, чија се оса поклапа са $z$-осом цилиндричног координатног система. (а) Коришћењем датих израза за просторне изводе и уочавањем симетрије написати Пуасонову једначину у тачкама у цилиндру. (б) Ако је познато да је потенцијал на површи цилиндра једнак нули, решавањем Пуасонове једначине одредити израз за потенцијал у тачкама у цилиндру.

| (а) | (б) |
|---|---|
| | |

**2.** Посматра се раздвојна површ две линеарне хомогене проводне средине, означене са 1 и 2, у којима постоји стационарно струјно поље. Познати су параметри средине 1, $\varepsilon_1$ и $\sigma_1$, параметри средине 2, $\varepsilon_2$ и $\sigma_2$, интензитет вектора електричне индукције у средини 2 непосредно уз површ, $D_2$, и угао који овај вектор заклапа са нормалом на површ усмереном ка средини 1, $\alpha_2$. Одредити интензитет вектора јачине електричног поља у средини 1 непосредно уз површ.

**3.** У свакој тачки једног домена у вакууму познати су запреминска густина наелектрисања $\rho(\mathbf{r},t)$ и вектор густине запреминске струје $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$, где је $\mathbf{r}$ вектор положаја. Написати изразе за закаснели електрични скалар–потенцијал и закаснели магнетски вектор–потенцијал ове расподеле наелектрисања и струја. Нацртати слику и на њој назначити величине које се појављују у изразима.

**4.** (а) Израчунати минимални и максимални интензитет простопериодичног вектора чији је комплексни представник дат изразом $\underline{\mathbf{A}} = (3+\mathrm{j}3)\mathbf{i}_x + (2+\mathrm{j}2)\mathbf{i}_y + (3+\mathrm{j}3)\mathbf{i}_z$. (б) Како је поларизован овај вектор? Одговор образложити.

| (а) | (б) |
|---|---|
| | |

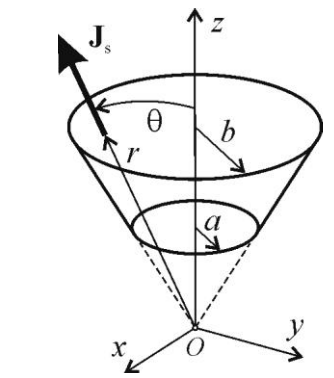
**5.** Раван простопериодичан ТЕМ талас учестаности $f = 3\,\mathrm{MHz}$ и ефективне вредности електричног поља $E_\mathrm{i} = 1\,\mathrm{V/m}$, који се простире кроз вакуум, наилази нормално на јоносферски слој критичне учестаности $f_\mathrm{c} = 6\,\mathrm{MHz}$ и дебљине $d = 50\,\mathrm{m}$. Одредити ефективну вредност $E_\mathrm{t}$ коју електрично поље овог таласа има након проласка кроз јоносферски слој.

| |
|---|
| |

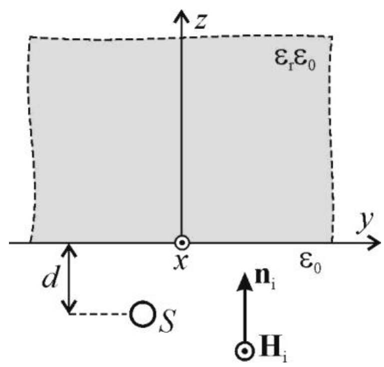
**6.** Примопредајни антенски систем чине две идентичне антене у слободном простору, појачања $g = 24\,\mathrm{dBi}$ и на међусобном растојању $d = 900\,\mathrm{m}$, оријентисане тако да је пренос између њих максималан. Ако се предајна антена напаја из простопериодичног генератора учестаности $f = 5\,\mathrm{GHz}$, снагом $P = 2\,\mathrm{W}$, израчунати снагу коју пријемна антена предаје прилагођеном пријемнику, $P_\mathrm{pr}$.

## ЗАДАЦИ

**1.** У вакууму постоје брзопроменљиве струје само по површи облика омотача зарубљене праве купе, познатих полупречника основа $a$ и $b$ ($a < b$). Оса симетрије купе подудара се са $z$-осом Декартовог координатног система, а изводнице купе секу се у координатном почетку и са $z$-осом заклапају познат угао $\theta$, као на слици. Тренутни вектор густине површинских струја дат је изразом у сферном координатном систему, $\mathbf{J}_\mathrm{s} = \sqrt{2} J_{\mathrm{s}0} \dfrac{a^2}{r^2} \cos\left(\omega t + r\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\right)\mathbf{i}_r$, где су $J_{\mathrm{s}0}$ и $\omega$ познате константе и $a/\sin\theta \le r \le b/\sin\theta$. Одредити комплексне представнике: (а) расподеле површинских слободних наелектрисања, и, у тачки $O$, (б) вектора јачине електричног поља које потиче од површинских слободних наелектрисања и (в) вектора јачине индукованог електричног поља.




**2.** Раван линијски поларизован простопериодичан ТЕМ талас, ефективне вредности магнетског поља $H_\mathrm{i} = 4\,\mathrm{mA/m}$ и учестаности $f = 2{,}4\,\mathrm{GHz}$, наилази из вакуума нормално на раздвојну површ са савршеним хомогеним немагнетским диелектриком, релативне пермитивности $\varepsilon_\mathrm{r}$. (а) У координатном систему са слике одредити изразе за комплексне представнике резултантних вектора јачине електричног и магнетског поља у вакууму. (б) Ако је познат однос максималне и минималне ефективне вредности резултантног електричног поља у вакууму, $E_{\max}/E_{\min} = 2$, израчунати ефективну вредност електромоторне силе индуковане у електрички малој жичаној контури површине $S = 0{,}3\,\mathrm{cm}^2$. Контура се налази у вакууму, на растојању $d = \lambda/3$ од раздвојне површи, и нормална је на вектор јачине инцидентног магнетског поља.

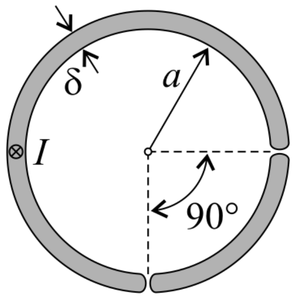


# Додатак из првог дела градива

## - ОФ -

**Задаци**

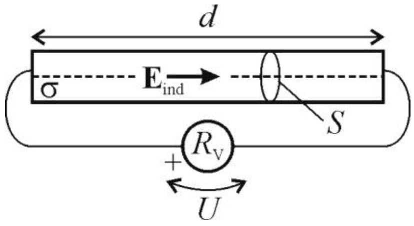
***3.** На слици је приказан попречни пресек веома дугачког правог немагнетског проводног шупљег цилиндра, полупречника $a$ и дебљине зида $\delta$ ($\delta \ll a$). У проводнику постоји временски константна струја јачине $I$, равномерно расподељена по попречном пресеку проводника. Ако се цилиндар расече по двема изводницама на два дела, на начин приказан на слици, одредити вектор подужне силе која делује на већи од два дела. Околна средина је ваздух.




**Питања**

***7.** Унутрашња електрода сферног кондензатора са ваздушним диелектриком је метална лопта полупречника $a$, а спољашња електрода веома танка метална љуска полупречника $b$ ($a < b$). Сматрајући електроде телима електростатичког система, чије референтно тело је електродама концентрична метална љуска бесконачног полупречника, одредити сопствене и међусобне капацитивности тог система.

***8.** У веома дугом и танком цилиндричном проводнику, константне непознате специфичне проводности $\sigma$, дужине $d$ и површине попречног пресека $S$ ($S \ll d^2$), постоји хомогено споропромењљиво индуковано електрично поље, интензитета $E_{\mathrm{ind}}(t)$, чији вектор је паралелан оси цилиндра, као на слици. На крајеве цилиндричног проводника прикључен је волтметар, унутрашње отпорности $R_{\mathrm{V}}$, који показује разлику електричних скалар-потенцијала на својим крајевима, $U(t)$. Одредити непознату специфичну проводност $\sigma$, ако су познате све остале наведене величине.




***Напомена***: у сферном координатном систему је $\operatorname{div}\mathbf{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(A_r r^2\right) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta \sin\theta\right) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$,

у цилиндричном координатном систему је $\operatorname{grad} f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\mathbf{i}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\phi}\mathbf{i}_\phi + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathbf{i}_z$, $\operatorname{div}\mathbf{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(rA_r\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$.

# ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА И РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ИСПИТА ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОФ), ОДРЖАНОГ 15. ЈУНА 2012. ГОДИНЕ

**ПИТАЊА**

**1.** (а) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. (б) $V=\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left(a^2-r^2\right)$.

**2.** $E_1=\frac{D_2}{\varepsilon_2\sigma_1}\sqrt{(\sigma_2\cos\alpha_2)^2+(\sigma_1\sin\alpha_2)^2}$.

**3.** $V(\mathbf{r}',t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho\left(\mathbf{r},t-\frac{R}{c_0}\right)}{R}\mathrm{d}v$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}',t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r},t-\frac{R}{c_0}\right)}{R}\mathrm{d}v$, $R=\left|\mathbf{r}'-\mathbf{r}\right|$, $c_0=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.

**4.** (а) $A_{\min}=0$, $A_{\max}=2\sqrt{22}$. (б) Вектор је поларизован линијски.

**5.** $E_{\mathrm{t}}\approx 7{,}5\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$.

**6.** $P_{\mathrm{pr}}\approx 3{,}55\,\mu\mathrm{W}$.

***7.** $C_{11}=0$, $C_{12}=C_{21}=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$, $C_{22}=4\pi\varepsilon_0 b$.

***8.** $\sigma=\frac{1}{R_{\mathrm{V}}S\left(-\frac{E_{\mathrm{ind}}(t)}{U(t)}-\frac{1}{d}\right)}$.

**ЗАДАЦИ**

**1.** (а) $\underline{\rho}_{\mathrm{s}}=-\frac{J_{\mathrm{s}0}\,a^2\beta}{\omega}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta r}}{r^2}$, $\beta=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, (б) $\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{q}}=\frac{J_{\mathrm{s}0}\,a^2\beta}{2\varepsilon_0\omega}(\sin\theta)^2\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{2a^2}-\frac{\sin\theta}{2b^2}+\mathrm{j}\beta\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right)\mathbf{i}_z$,

(в) $\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{ind}}=-\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0 J_{\mathrm{s}0}\,a^2}{2}(\sin\theta)^2\cos\theta\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\mathbf{i}_z$.

**2.** (а) $\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{rez}}=Z_0H_{\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\left(1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta z}\right)\left(-\mathbf{i}_y\right)$, $\underline{\mathbf{H}}_{\mathrm{rez}}=H_{\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\left(1-R\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta z}\right)\mathbf{i}_x$, $Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, $\beta=2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, $R=\frac{1-\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}{1+\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}$.

(б) $e_{\mathrm{ind}}=2\pi f\,\mu_0H_{\mathrm{i}}\frac{\sqrt{28}}{6}S\approx 2\,\mathrm{mV}$.

***3.** Вектор подужне силе на већи део цилиндра, интензитета $F'=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I^2}{8\pi^2 a}$, лежи у равни цртежа, дуж заједничке симетрале два дела цилиндра и усмерен је ка мањем од њих.

- РЕЗУЛТАТИ ИСПИТА ЋЕ БИТИ ОБЈАВЉЕНИ ДО 16. ЈУНА У 17:30 ЧАСОВА.
- УВИД У ЗАДАТКЕ, У СОБИ 63, ЈЕ 16. ЈУНА ОД 17:30 ДО 18:00 ЧАСОВА.

Са предмета Електромагнетика