Дарко Нинковић

darko@etf.rs

соба 64а

Просторни изводи:

Градијент:

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{i}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{i}_z}$$

Дивергенција:

$$\vec{A} = A_x\vec{i}_x + A_y\vec{i}_y + A_z\vec{i}_z$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Ротор

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \boxed{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{i}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{i}_z}$$

Набла оператор

$$\operatorname{grad} f = \nabla f$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

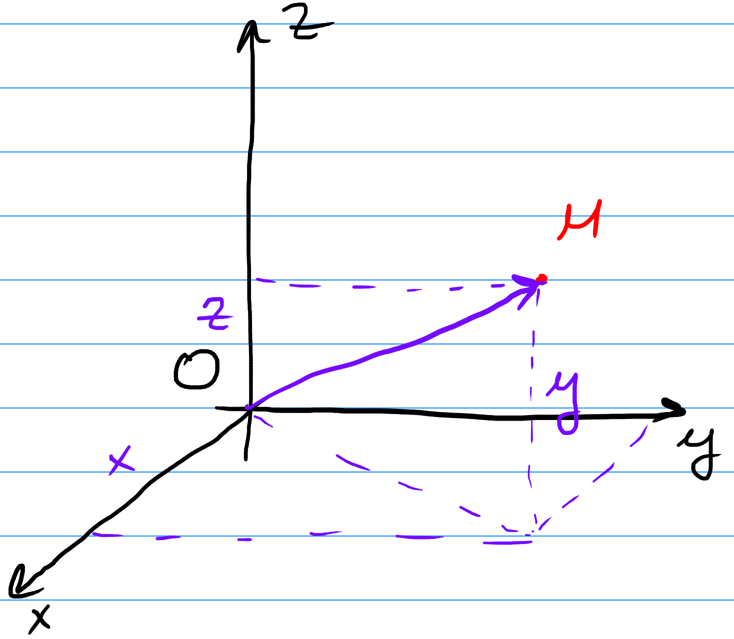
Лапласијан

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f)$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Декартов координатни систем



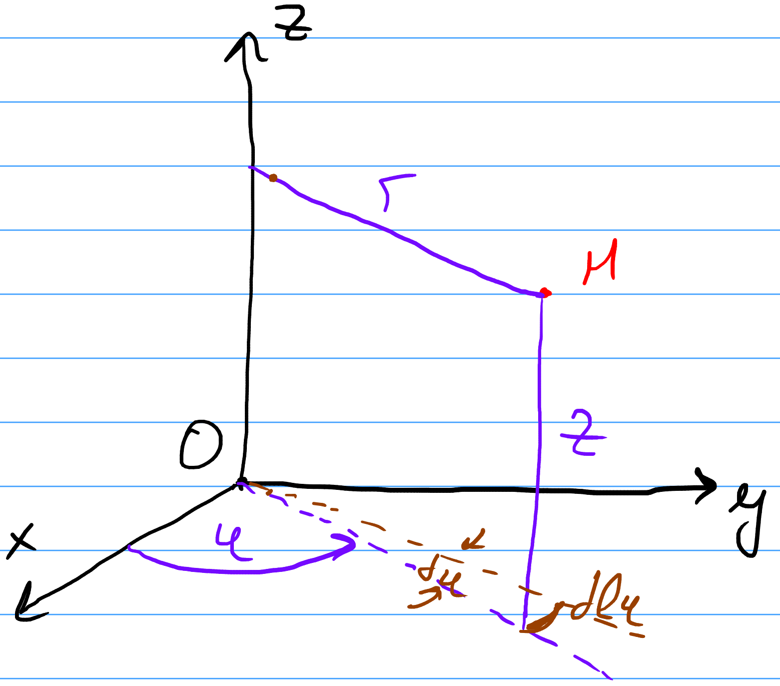
$M(x, y, z) \quad -\infty < x, y, z < \infty$

$dl_x = dx \quad dl_y = dy \quad dl_z = dz$

$dv = dx \cdot dy \cdot dz$

$\boxed{\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z}$

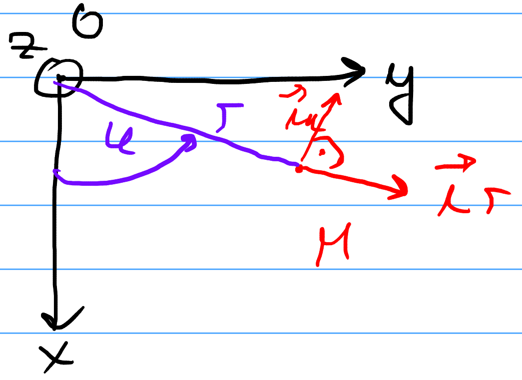
Цилиндрични координатни систем:



$M(r, \varphi, z) \quad r \geq 0, \ -\pi < \varphi \leq \pi, \ -\infty < z < \infty$

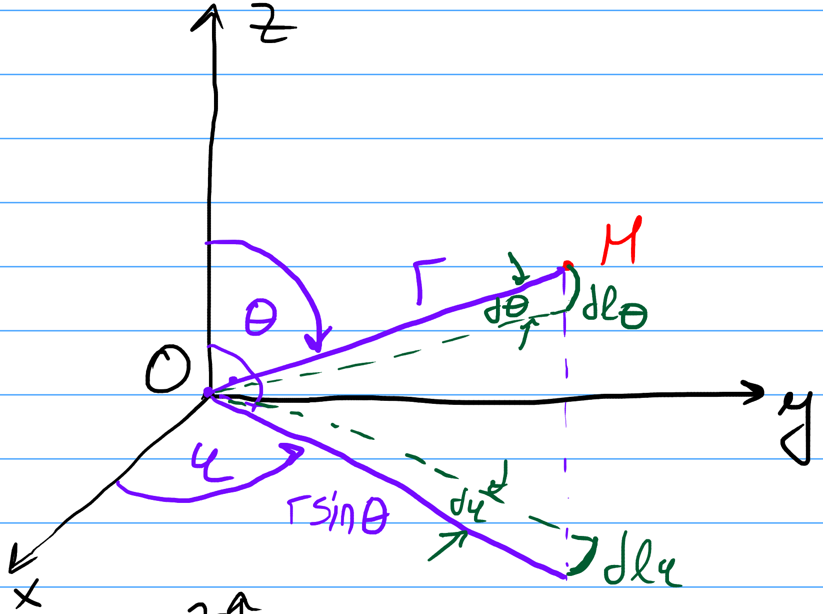
$dl_z = dz \quad dl_r = dr \quad dl_\varphi = r\,d\varphi$

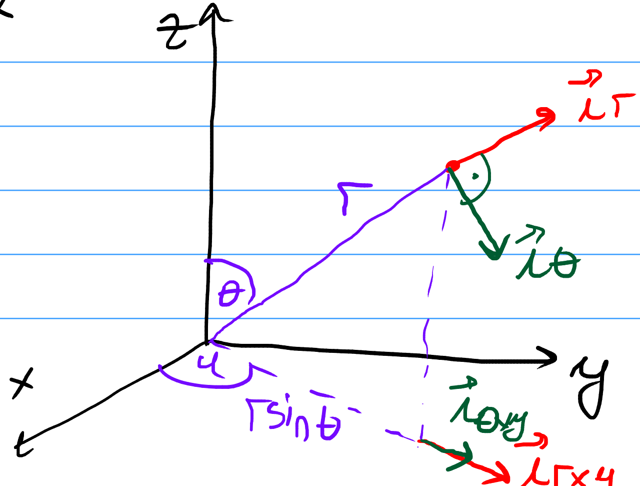
$dv = r\,dr\,d\varphi\,dz$



$$\boxed{\begin{aligned} \vec{i}_r &= \cos\varphi\,\vec{i}_x + \sin\varphi\,\vec{i}_y \\ \vec{i}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{i}_x + \cos\varphi\,\vec{i}_y \\ \vec{i}_z & \end{aligned}}$$

Сферни координатни систем





$M(r,\theta,\varphi) \qquad r \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi$

$dl_r = dr \qquad dl_\theta = r\,d\theta \qquad dl_\varphi = r\sin\theta\,d\varphi$

$$dv = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\boxed{\vec{i}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i}_x + \cos\varphi\,\vec{i}_y}$$

$$\boxed{\vec{i}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{i}_y + \cos\theta\,\vec{i}_z}$$

$$\boxed{\vec{i}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{i}_y - \sin\theta\,\vec{i}_z}$$

Цилиндричне координате:

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{i}_z$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot A_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{i}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{i}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{i}_z$$

Сферне координате:

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{i}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\vec{i}_\theta +$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{i}_\varphi$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

17. јун 2011.

1. (а) Написати потпуни систем интегралних једначина за електростатичко поље у вакууму у чијој је свакој тачки позната запреминска густина наелектрисања. (б) Написати исказе теореме Гаус-Остроградског и Стоксове теореме. (в) Полазећи од релација написаних под (а) и (б) извести потпуни систем диференцијалних једначина за електростатичко поље у вакууму.

(а)	(б)	(в)
$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho\, dv$	$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_v \operatorname{div}\vec{A}\, dv$ Г-О Т.	$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = 0 \\ \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

Стоксова Т.

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

10. децембар 2022.

1. Полазећи од диференцијалних једначина за електростатичко поље у вакууму, у домену у чијој је свакој тачки позната густина запреминског наелектрисања ρ, и диференцијалне везе између вектора јачине електричног поља и електричног скалар-потенцијала, извести Поасонову једначину.

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,V \qquad \mathrm{div}(-\mathrm{grad}\,V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot (\nabla V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ Поасонова једначина

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v} \frac{\rho\, dv}{r}}$$ Решење Поасонове јед.

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{i}_r = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v} \frac{\rho\, dv}{r^2}\vec{i}_r}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

19. септембар 2014.

1. Да ли је, у вакууму, могуће остварити електростатичко поље чији је потенцијал дат изразом $V(r) = Q\dfrac{e^{-\alpha r}}{r}(1+\alpha r)$, $r > 0$, у сферном координатном систему, где су Q и α познате константе? Образложити одговор.

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \underline{\operatorname{rot}\vec{E} = 0} \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{i}_r \qquad V = Qe^{-\alpha r}\left(\frac{1}{r}+\alpha\right)$$

$$\vec{E} = -Q\left(e^{-\alpha r}(-\alpha)\left(\frac{1}{r}+\alpha\right) + e^{-\alpha r}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right)\vec{i}_r$$

$$\vec{E} = Qe^{-\alpha r}\left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\vec{i}_r = E_r(r)\,\vec{i}_r$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{могуће}}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

14. јануар 2016.

1. Електростатички потенцијал у цилиндричном координатном систему је дат изразом $V(r,\phi) = A\dfrac{\sin\phi}{r}$, где је A константа. Одредити израз за вектор јачине електричног поља који одговара овом потенцијалу.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{i}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi$$

$$\vec{E} = -A\sin\varphi\left(-\frac{1}{r^2}\right)\vec{i}_r - \frac{1}{r}\,\frac{A}{r}\cos\varphi\,\vec{i}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{A}{r^2}\left(\sin\varphi\,\vec{i}_r - \cos\varphi\,\vec{i}_\varphi\right)}$$

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ,ОГ)

15. септембар 2021.

1. У вакууму је познат потенцијал тачака у Декартовом координатном систему, $V(x,y,z)=V_0 \mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$, $-\infty < x,y,z < \infty$, где су V_0, a и b константе. У свакој тачки одредити (а) вектор јачине електричног поља и (б) густину запреминског наелектрисања.

(а)

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{i}_y$$

$$\vec{E} = -V_0 e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\left(-\frac{2x}{a^2}\right)\vec{i}_x - V_0 e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\left(-\frac{2y}{b^2}\right)\vec{i}_y$$

$$\vec{E} = 2V_0 e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\left(\frac{x}{a^2}\vec{i}_x + \frac{y}{b^2}\vec{i}_y\right)$$

(б)

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \rho = \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = \varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right)$$

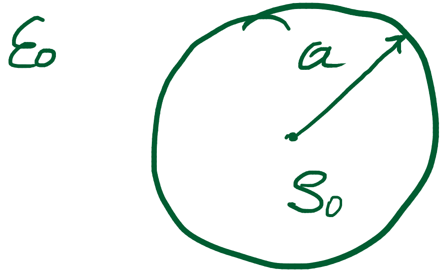
$$\rho = 2V_0\varepsilon_0\left(\frac{1}{a^2}e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{x}{a^2}e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\left(\frac{-2x}{a^2}\right) + \frac{1}{b^2}e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{y}{b^2}e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\left(\frac{-2y}{b^2}\right)\right)$$

$$\boxed{\rho = 2\varepsilon_0 V_0 e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)\right)}$$

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

5. новембар 2011.

1. Запреминска наелектрисања константне густине ρ_0 распоређена су у ваздуху по домену облика сфере полупречника a. (а) За сферни координатни систем, са координатним почетком у центру сфере, написати Поасонову једначину у сфери и ван ње. Ако је познат потенцијал на површи сфере у односу на референтну тачку у бесконачности, V_0, решавањем Поасонове једначине одредити израз за потенцијал у (б) тачкама у сфери, и (в) тачкама ван сфере.

(а)	(б)	(в)
	$\rho = \begin{cases} \rho_0, & r<a \\ 0, & r>a \end{cases}$	$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\Delta V = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}, & r<a \\ 0, & r>a \end{cases}$

$\Delta V = \mathrm{div}(\mathrm{grad} V)$ $\quad \rho = \rho(r) \Rightarrow V = V(r)$

$$\Delta V = \mathrm{div}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{i}_r\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}, & r<a \\ 0, & r>a \end{cases}}$$

$\underline{r<a}$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}r^2$$

$$d\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}r^2\,dr \quad /\int$$

$$r^2\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int r^2\,dr = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{3} + C_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r}{3} + \frac{C_1}{r^2}$$

$$dV = -\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}dr + \frac{C_1}{r^2}dr \;/\int$$

$$V = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\int r\,dr + C_1\int\frac{dr}{r^2} = \underline{-\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{C_1}{r} + C_2}$$

$V_{(r=0)} = -\frac{C_1}{0} + C_2$ не може $\to \infty$ $\Rightarrow$ $\underline{C_1 = 0}$

$\underline{r \in [0, a]}$ $\quad V = -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + C_2$

$V_{(r=a)} = V_0 = -\frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0} + C_2 \qquad C_2 = V_0 + \frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0}$

$$V = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(r^2 - a^2) + V_0$$

$\underline{r>a}$ $\quad \rho_0 = 0 \quad V = -\frac{C_1}{r} + C_2$

$r_{ef} \to \infty \Rightarrow V_{(r\to\infty)} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$V = -\frac{C_1}{r}$

$V_{(r=a)} = V_0 = -\frac{C_1}{a} \quad C_1 = -aV_0 \quad V_{(r)} = \frac{aV_0}{r}$

$$\boxed{V_{(r)} = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(r^2 - a^2) + V_0, & r \le a \\ \frac{aV_0}{r}, & r > a \end{cases}}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

12. јануар 2012.

1. Запреминска наелектрисања константне густине ρ распоређена су у ваздуху по домену облика веома дугачког цилиндра, полупречника a, чија се оса поклапа са z-осом цилиндричног координатног система. (а) Коришћењем датих израза за просторне изводе и уочавањем симетрије написати Поасонову једначину у тачкама у цилиндру. (б) Ако је познато да је потенцијал на површи цилиндра једнак нули, решавањем Поасонове једначине одредити израз за потенцијал у тачкама у цилиндру.

(а)	(б)

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

9. јануар 2020.

1. (а) Написати изразе за градијент и дивергенцију у Декартовом координатном систему. (б) Позната је функција расподеле електростатичког потенцијала у Декартовом координатном систему $V(x,y) = V_1 \sin(\pi x/a) + V_2 \cos(\pi y/b) + V_3$, где су a, b, V_1, V_2 и V_3 познате позитивне константе. Средина је вакуум. Одредити функцију расподеле запреминског наелектрисања које ствара овакву расподелу потенцијала.

(а)	(б)