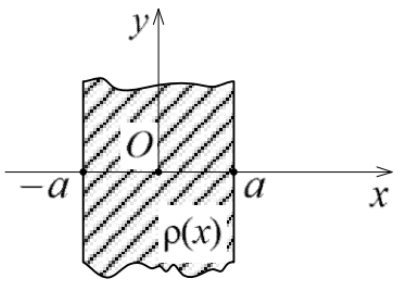
КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

17. новембар 2018.

1. У вакууму, у делу простора, постоји запремински расподељено наелектрисање, чија густина зависи само од Декартове x-координате и дата је изразом, $\rho(x)=\begin{cases}\rho_0\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right), |x|\le a\\ 0, |x|>a\end{cases}$ при чему су познате позитивне константе ρ_0 и a. Решавањем Поасонове једначине одредити електрични скалар-потенцијал $V(x,y,z)$ за $|x|\le a$, ако су познати $V(x=-a)=V_1$ и $V(x=a)=V_2$, где су V_1 и V_2 познате константе.



1

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0 \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \quad \rho_0,\ a,\ V(x=-a) = V_1,\ V(x=a) = V_2,$$

$V(x) = ?\quad |x| \le a$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad V = V(x) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),\ |x| \le a$$

$$d\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$$

$$\int e^{\frac{x}{t}}\, dx = \int e^{\frac{x}{t}} \cdot t\, \frac{dx}{t} = t\, e^{\frac{x}{t}}$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(a e^{\frac{x}{a}} - (-a)e^{-\frac{x}{a}}\right) + C_1 = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + C_1$$

$$V = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\int\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx + C_1\int dx$$

$$V = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\left(a e^{\frac{x}{a}} + (-a)e^{-\frac{x}{a}}\right) + C_1 x + C_2$$

$$V = -\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + C_1 x + C_2$$

$$V(x=-a) = V_1 = -\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{e} - e\right) - C_1 a + C_2$$

$$V(x=a) = V_2 = -\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}\left(e - \frac{1}{e}\right) + C_1 a + C_2$$

$$V_1 + V_2 = 2C_2 \qquad C_2 = \frac{V_1+V_2}{2}$$

$$V_2 = -\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}\left(e - \frac{1}{e}\right) + C_1 a + \frac{V_1+V_2}{2}$$

$$C_1 a = \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}\left(e - \frac{1}{e}\right) + \frac{V_2 - V_1}{2}$$

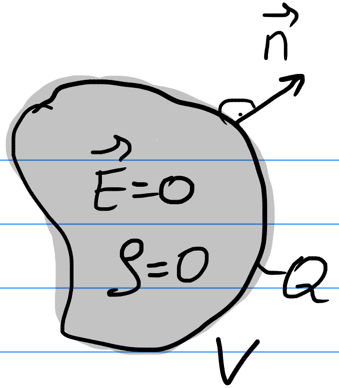
$$C_1 = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\left(e - \frac{1}{e}\right) + \frac{V_2 - V_1}{2a}$$

$$\boxed{V = -\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + \left(\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\left(e - \frac{1}{e}\right) + \frac{V_2 - V_1}{2a}\right)x + \frac{V_1+V_2}{2} \qquad |x| \leq a}$$

22. Šta su to koeficijenti potencijala, a šta koeficijenti elektrostatičke indukcije? Kakva veza postoji između njih? (*P911124*)

(22)

ε_0

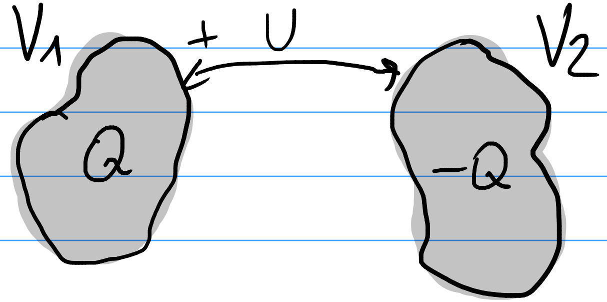


$$\vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

$C\,[F]$

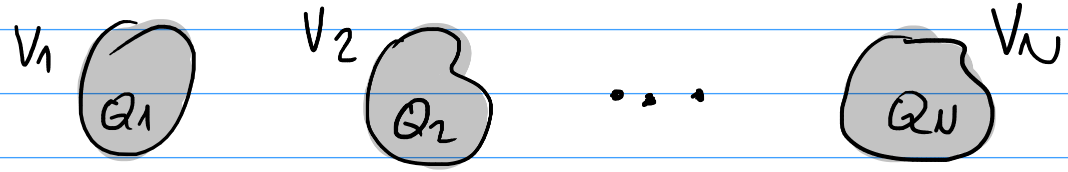
ε_0



$$U = V_1 - V_2$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

ПОСМАТРАМО N+1 ПРОВОДНО ТЕЛО:



$$Q_{N+1} = -\sum_{i=1}^{N} Q_i$$

РЕФЕРЕНТНО $V_{N+1} = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} V_1 = a_{11} Q_1 + a_{12} Q_2 + \ldots + a_{1N} Q_N \\ V_2 = a_{21} Q_1 + a_{22} Q_2 + \ldots + a_{2N} Q_N \\ \vdots \\ V_N = a_{N1} Q_1 + a_{N2} Q_2 + \ldots + a_{NN} Q_N \end{array}\right\} \quad [V] = [a] \cdot [Q]$$

a_{ij} - коефицијенти потенцијала $\left[\frac{V}{C}\right] = [F^{-1}]$

$$a_{ij} = \left.\frac{V_i}{Q_j}\right|_{Q_k = 0,\, k \in \{1, \ldots, N\},\, k \neq j}$$

$a_{ij} > 0$

$a_{ij} = a_{ji}$ (реципроцитет)

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1 = b_{11} V_1 + b_{12} V_2 + \ldots + b_{1N} V_N \\ Q_2 = b_{21} V_1 + b_{22} V_2 + \ldots + b_{2N} V_N \\ \vdots \\ Q_N = b_{N1} V_1 + b_{N2} V_2 + \ldots + b_{NN} V_N \end{array}\right\}$$

$$[Q] = [b] \cdot [V]$$

b_{ij} – коефицијенти електростатичке индукције $[F]$

$$b_{ij} = \frac{Q_i}{V_j}\Bigg|_{V_k = 0,\ k \in \{1, \ldots, N\},\ k \neq j}$$

$$b_{ii} > 0, \quad b_{ij} \leq 0 \quad i \neq j$$

$$[b] = [a]^{-1} \qquad [a]^{-1} = \frac{1}{\det[a]} \operatorname{adj}[a]$$

$$[a]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det[a] = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

$$\operatorname{adj}[a] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

24. Kako se definišu delimične kapacitivnosti? Kako se one mogu izračunati iz koeficijenata potencijala? (*P910613*)

(24)

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + \ldots + C_{1N}(V_1 - V_N) \\ Q_2 &= C_{21}(V_2 - V_1) + C_{22}V_2 + \ldots + C_{2N}(V_2 - V_N) \\ &\vdots \\ Q_N &= C_{N1}(V_N - V_1) + C_{N2}(V_N - V_2) + \ldots + C_{NN}V_N \end{aligned}\right\} \quad [Q] = [C] \cdot [V]$$

C_{ij} - делимичне капацитивности [F]

$$Q_1 = (C_{11} + C_{12} + \ldots + C_{1N})V_1 - C_{12}V_2 - \ldots - C_{1N}V_N$$

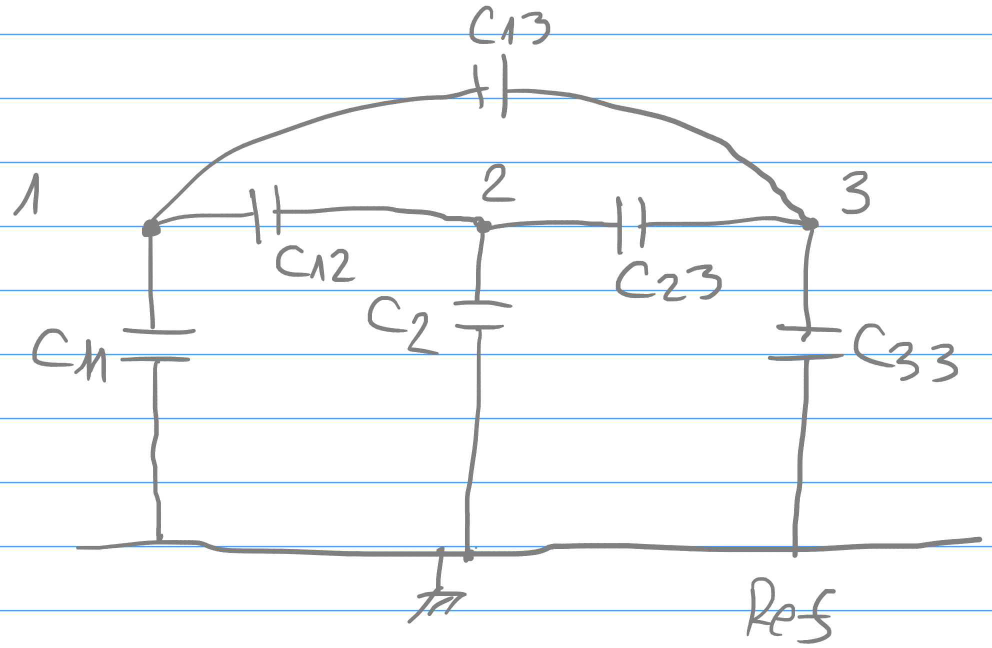
$$Q_1 = b_{11}V_1 + b_{12}V_2 + \ldots + b_{1N}V_N$$

$C_{ij} = -b_{ij}, \; i \neq j$ $\quad$ $C_{ij} \geq 0$ међусобне капацитивности

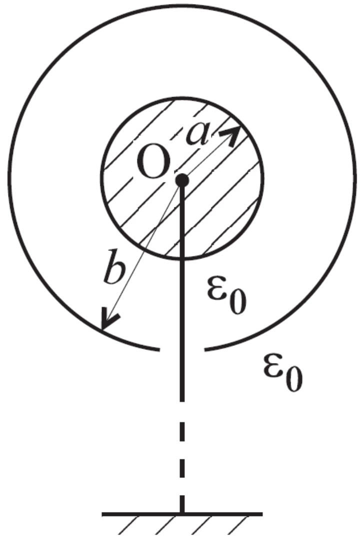
$C_{ii} = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}$ $\quad$ $C_{ii} > 0$ сопствене капацитивности

$$C_{11} + C_{12} + \dots + C_{1N} = b_{11}$$

$$C_{11} = b_{11} - C_{12} - \dots - C_{1N} = b_{11} + b_{12} + \dots + b_{1N}$$



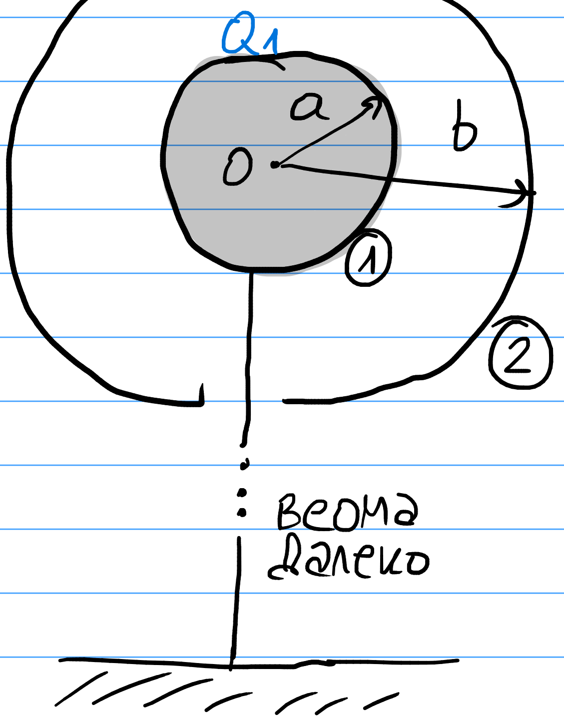
26. Oko metalne lopte, poluprečnika a, koncentrično sa njom, nalazi se vrlo tanka metalna ljuska, poluprečnika b ($b > a$). Sredina je svuda vakuum. Lopta je vezana tankim provodnikom za referentnu tačku nultog potencijala, koja se nalazi veoma daleko (slika 26.1). Na sfernu ljusku je dovedena količina elektriciteta Q. Odrediti potencijal ljuske. (*Z751117*)



Slika 26.1.

(26)

ε_0 $Q, V = ?$



$a, b, Q, V = ?$

$$a_{11} = \frac{V_1}{Q_1}\Big|_{Q_2=0}$$

$r > a$

$$\vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{i}_r$$

$$V_1 = \int_{r=a}^{+\infty} E_1 dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{+\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\boxed{a_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}}$$

$$V_2 = \int_{r=b}^{r\to+\infty} E_1 dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{V_2}{Q_1}\Big|_{Q_2=0} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}}$$

$$a_{22} = \frac{V_2}{Q_2}\Big|_{Q_1=0} \qquad \vec{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{i}_r, \quad r>b$$

$$V_2 = \int_{r=b}^{+\infty} E_2\,dr = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b} \qquad a_{22} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}}$$

$$V_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 \qquad V_1 = 0 \quad Q_2 = Q$$

$$\underline{V_2 = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2}$$

$$0 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} \Rightarrow \frac{Q_1}{a} = -\frac{Q}{b} \qquad Q_1 = -\frac{Qa}{b}$$

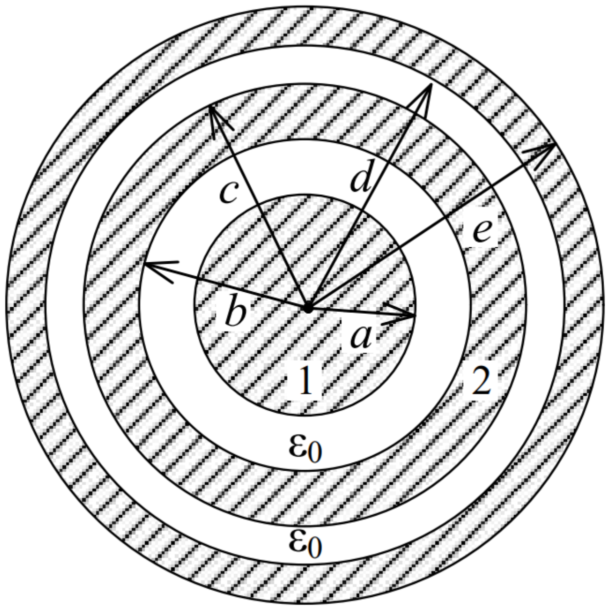
$$\underline{V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}} \qquad V_2 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\frac{a}{b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

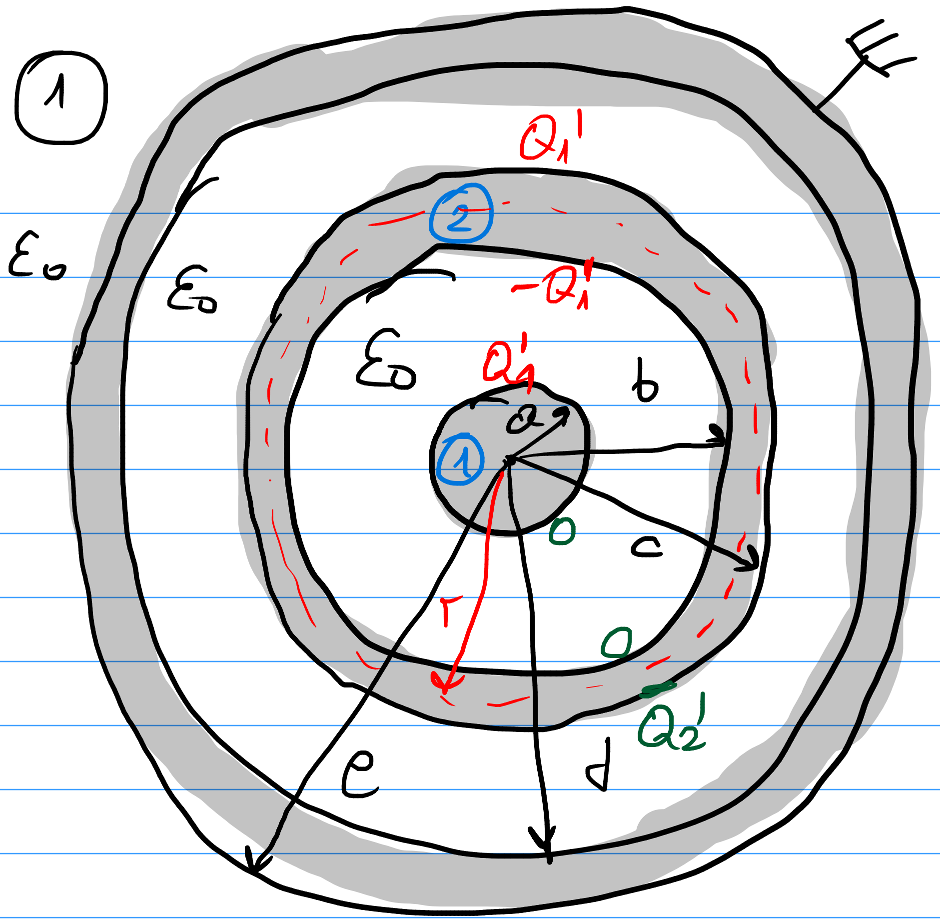
$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(1 - \frac{a}{b}\right) = \boxed{\frac{Q(b-a)}{4\pi\varepsilon_0 b^2}}$$

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

15. јануар 2019.

1. На слици је приказан попречни пресек триаксијалног вода, који се састоји од три коаксијална цилиндрична веома дугачка проводника. Полупречници проводника су $a = 2{,}5\,\mathrm{mm}$, $b = 4\,\mathrm{mm}$, $c = 5\,\mathrm{mm}$, $d = 8\,\mathrm{mm}$, и $e = 9\,\mathrm{mm}$. Диелектрик вода је ваздух. Означавајући унутрашњи прводник са 1, средишњи са 2, и узимајући спољашњи проводник вода за референтни, израчунати (а) подужне коефицијенте потенцијала и (б) Ако је унутрашњи проводник на потенцијалу $V_1 = 0$, а средишњи проводник наелектрисан подужним наелектрисањем $Q_2' = 20\,\mathrm{nC/m}$, израчунати наелектрисање унутрашњег проводника Q_1' и потенцијал средишњег проводника V_2.





$a = 2{,}5\,mm,\ b = 4\,mm,\ c = 5\,mm,\ d = 8\,mm,$

$e = 9\,mm,\ [a] = ?,\ V_1 = 0,\ Q_2' = 20\,\frac{nC}{m},$

$Q_1' = ?,\ V_2 = ?$

$Q_2' = 0,\ Q_1'$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{i}_r, & r \in (a,b) \\ 0, & r \in (b,c) \\ \dfrac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{i}_r, & r \in (c,d) \end{cases}$$

$$V_1 = \int_{r=a}^{r=d} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0 r}\,dr + \int_c^d \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0 r}\,dr = \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{b}{a} + \ln\frac{d}{c}\right)$$

$$V_2 = \int_{r=c}^{r=d} \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0 r}\,dr = \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{c}$$

$$a_{11} = \frac{V_1}{Q_1'} = \frac{\ln\frac{b}{a} + \ln\frac{d}{c}}{2\pi\varepsilon_0} = \boxed{16{,}9 \cdot 10^9 \frac{m}{F}}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{V_2}{Q_1} = \frac{\ln\frac{d}{c}}{2\pi\varepsilon_0} = \boxed{8{,}45 \cdot 10^9 \frac{m}{F}}$$

$\underline{Q_1' = 0,\ Q_2'}$

$$r \in [c, d] \ , \quad \vec{E}_2 = \frac{Q_2'}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{i}_r$$

$$V_2 = \int_{r=c}^{r=d} E\,dr = \frac{Q_2'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{c} \qquad a_{22} = \frac{V_2}{Q_2'} = \frac{\ln\frac{d}{c}}{2\pi\varepsilon_0} = \boxed{8{,}45 \cdot 10^9 \frac{m}{F}}$$

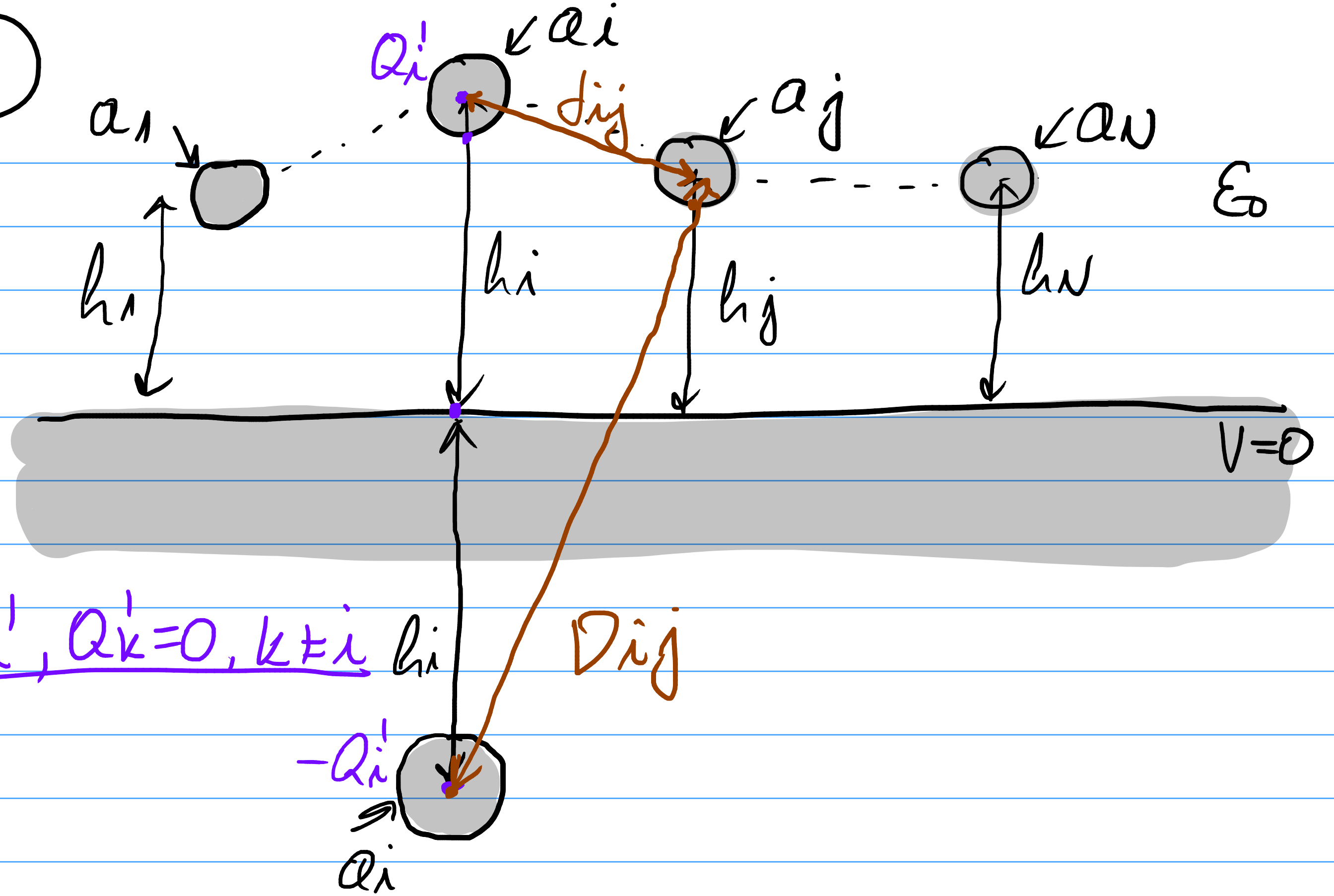
$$\cancel{V_1}^{\,0} = a_{11}Q_1' + a_{12}Q_2'$$
$$\underline{V_2 = a_{21}Q_1' + a_{22}Q_2'}$$

$$Q_1' = -\frac{a_{12}}{a_{11}} Q_2' = \boxed{-10n\frac{C}{m}}$$

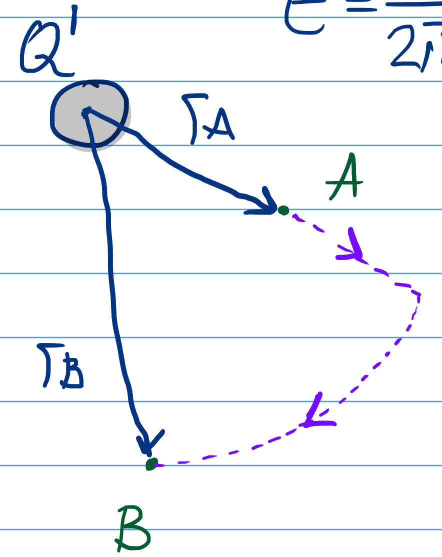
$$V_2 = a_{21}\left(Q_1' + Q_2'\right) = \boxed{84{,}48V}$$

34. Izvesti izraze za koeficijente potencijala tankih žičanih provodnika paralelnih provodnoj ravni u vakuumu. (*P970807*)

34



Q_i', $Q_k'=0$, $k \neq i$



$$\vec{E} = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{i}_r$$

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{r_A}^{r_B} E\,dr = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r_A}$$

$$V_i = \frac{Q_i'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h_i}{a_i} + \frac{-Q_i'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h_i}{2h_i}$$

$$V_i = \frac{Q_i'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h_i \quad 2h_i}{a_i \quad h_i} = \frac{Q_i'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_i}{a_i}$$

$$\boxed{a_{ii} = \frac{\ln \frac{2h_i}{a_i}}{2\pi\varepsilon_0}}$$

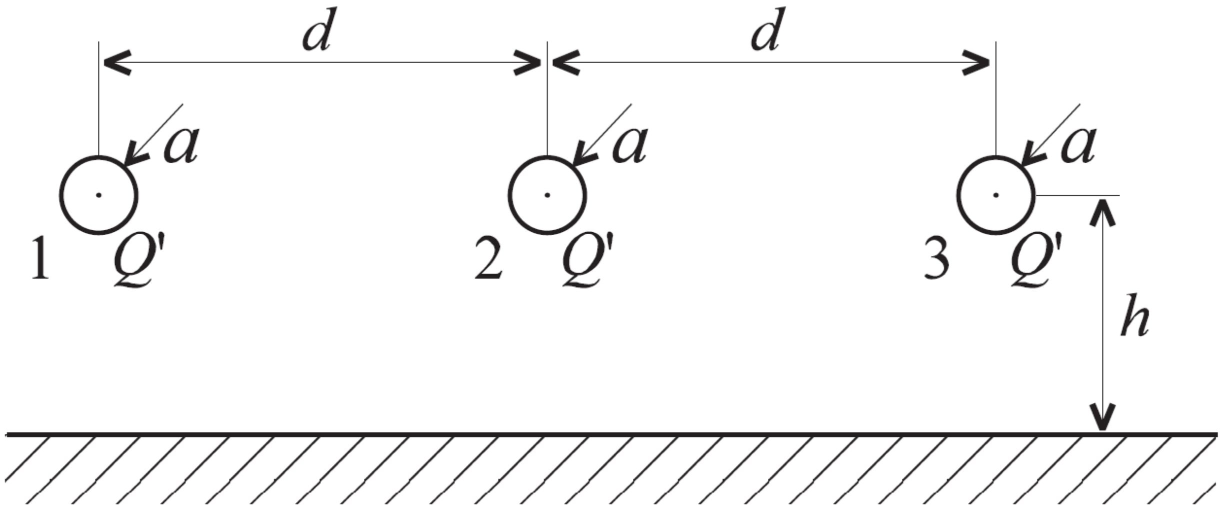
$$V_j = \frac{Q_i'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{h_i}{d_{ij}} + \frac{-Q_i'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{h_i}{D_{ij}}$$

$$V_j = \frac{Q_i'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\cancel{h_i}\, D_{ij}}{d_{ij}\, \cancel{h_i}}$$

$$a_{ij} = \frac{V_j}{Q_i'}$$

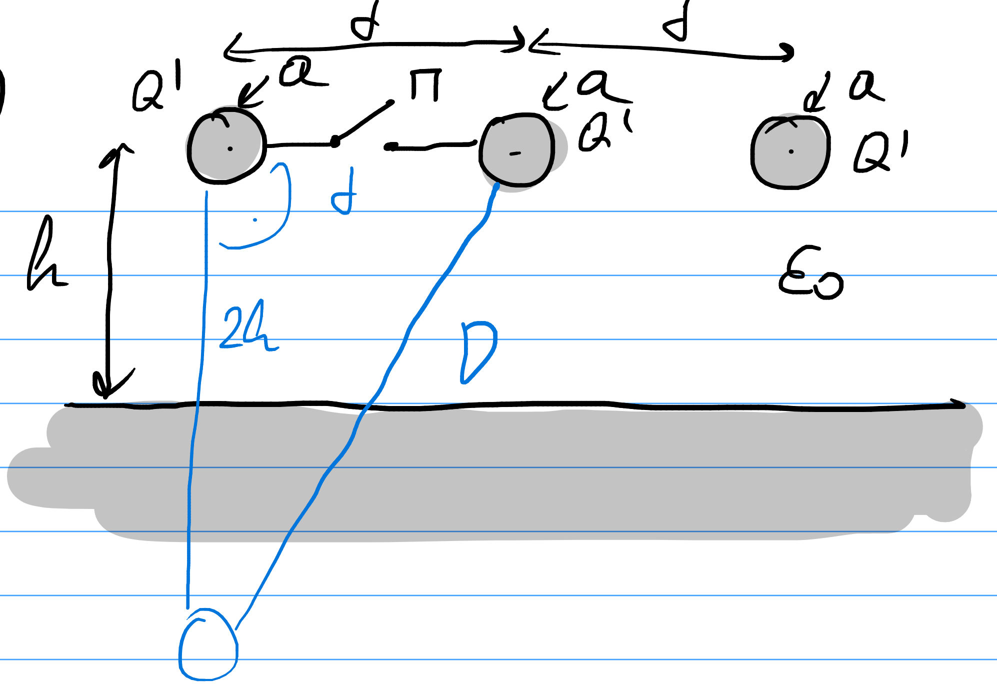
$$\boxed{a_{ij} = \frac{\ln \frac{D_{ij}}{d_{ij}}}{2\pi\varepsilon_0}}$$

41. U vazduhu na visini h iznad provodne ravni postavljena su tri tanka paralelna cilindrična provodnika poluprečnika a, kao na slici 41. Rastojanje između osa susednih provodnika je d. Svaki provodnik je slobodan i opterećen podužnim naelektrisanjem Q'. Odrediti priraštaj potencijala provodnika 3 kada se provodnici 1 i 2 kratko spoje. (*Z930826*)



Slika 41.

41



$$h, a, d, Q', \Delta V_3 = ?$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2h}{a}$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{4h^2 + d^2}}{d}$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{4h^2 + 4d^2}}{2d}$$

$$Q_1^{(1)'} = Q_2^{(1)'} = Q_3^{(1)'} = Q'$$

$$V_3^{(1)} = a_{31} Q' + a_{32} Q' + a_{33} Q' = Q'(a_{11} + a_{13} + a_{12})$$

(2) $\Pi \to (2)$

$$V_1 = a_{11} Q_1' + a_{12} Q_2' + a_{13} Q_3'$$
$$V_2 = a_{12} Q_1' + a_{11} Q_2' + a_{12} Q_3'$$
$$V_3 = a_{13} Q_1' + a_{12} Q_2' + a_{11} Q_3'$$

$$Q_3' = Q'$$
$$Q_1' + Q_2' = 2Q'$$
$$V_1 = V_2$$

$$V_1 = a_{11} Q_1' + a_{12}(2Q' - Q_1') + a_{13} Q' = Q_1'(a_{11} - a_{12}) + Q'(2a_{12} + a_{13})$$

$$V_1 = a_{12} Q_1' + a_{11}(2Q' - Q_1') + a_{12} Q' = Q_1'(a_{12} - a_{11}) + Q'(2a_{11} + a_{12})$$

$$V_3 = a_{13} Q_1' + a_{12}(2Q' - Q_1') + a_{11} Q' = \underline{Q_1'(a_{13} - a_{12}) + Q'(a_{11} + 2a_{12})}$$

$$\Delta V_3 = V_3 - V_3^{(1)}$$

$$\boxed{\Delta V_3 = -\frac{(a_{12} - a_{13})^2}{2(a_{11} - a_{12})} Q'}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ)

9. јун 2016.

1. Сферни кондензатор полупречника електрода a и b $(b > a)$ има ваздушни диелекрик. (а) Полазећи од диференцијалних једначина за електростатичко поље и везе између електростатичког потенцијала и електричног поља, извести диференцијалну једначину коју задовољава електростатички потенцијал у диелектрику кондензатора у сферном координатном систему чији је центар у центру кондензатора. (б) Решавањем претходно изведене диференцијалне једначине, одредити електростатички потенцијал у диелектрику кондензатора, $V(r)$, уколико је познато $V(r = a) = 0$ и $V(r = b) = V_0$, где је r радијално растојање од центра кондензатора, $a < r < b$.

(а)	(б)

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ)

3. април 2016.

1. У вакууму, у делу простора, постоји запремински расподељено наелектрисање, чија густина зависи само од Декартове x-координате и дата је изразом $\rho = \begin{cases} \rho_0 (x^3/a^3), |x| \le a \\ 0, |x| > a \end{cases}$, при чему су познате позитивне константе ρ_0 и a. Решавањем Поасонове једначине одредити електрични скалар-потенцијал $V(x)$ у произвољној тачки простора, ако су познати $V(x=-a)=V_1$ и $V(x=a)=V_2$.