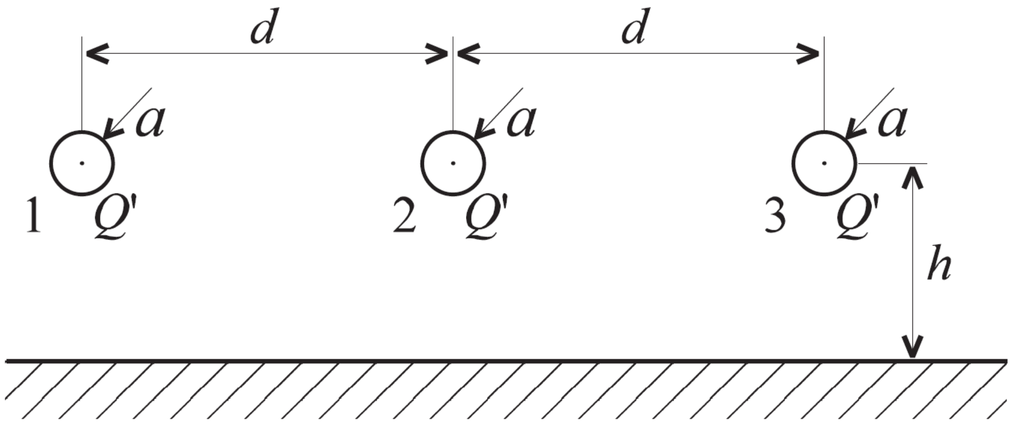
42. Pretpostavimo da su provodnici 1 i 3 na slici 41 galvanski spojeni sa provodnom ravni, a da je provodnik 2 slobodan. Odrediti izraz za podužnu kapacitivnost ovako dobijenog kondenzatora. (*Z950119*)



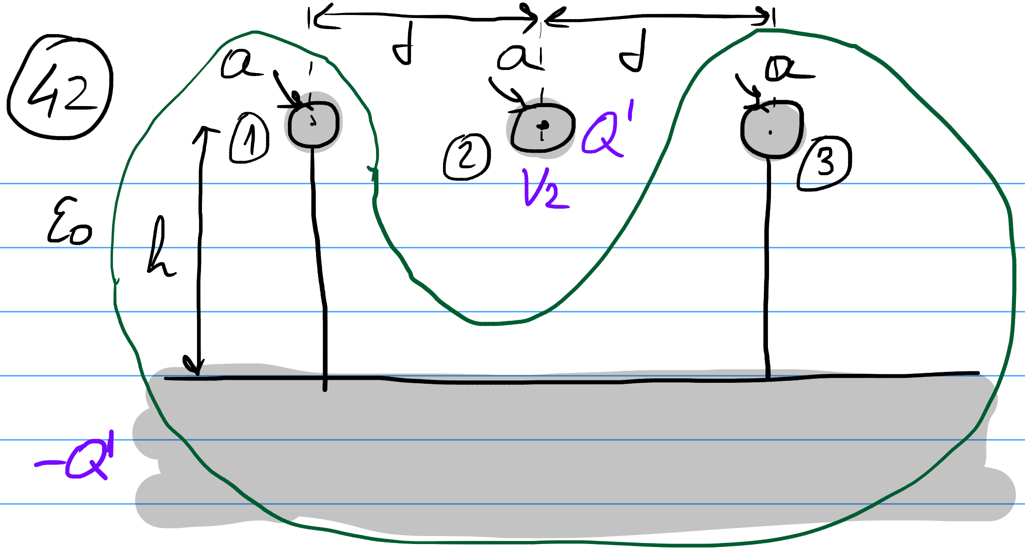
Slika 41.

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2h}{a}$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{4h^2+4d^2}}{2d}$$



$C' = ?$

$$V_1 = a_{11} Q_1' + a_{12} Q_2' + a_{13} Q_3'$$
$$V_2 = a_{12} Q_1' + a_{11} Q_2' + a_{12} Q_3'$$
$$V_3 = a_{13} Q_1' + a_{12} Q_2' + a_{11} Q_3'$$

$$C' = \frac{Q'}{V_2}$$

$V_1 = 0$, $V_3 = 0$, $Q_2' = Q'$

$$0 = a_{11} Q_1' + a_{12} Q' + a_{13} Q_3'$$
$$V_2 = a_{12} Q_1' + a_{11} Q' + a_{12} Q_3' = a_{11} Q' + a_{12}(Q_1' + Q_3')$$
$$0 = a_{13} Q_1' + a_{12} Q' + a_{11} Q_3'$$
+

$$0 = (a_{11} + a_{13}) Q_1' + 2a_{12} Q' + (a_{11} + a_{13}) Q_3' = 2a_{12} Q' + (a_{11} + a_{13})(Q_1' + Q_3')$$

$$Q_1' + Q_3' = -\frac{2a_{12}}{a_{11}+a_{13}} Q'$$

$$V_2 = Q'\left(a_{11} - \frac{2a_{12}^2}{a_{11}+a_{13}}\right) \qquad C' = \frac{Q'}{V_2}$$

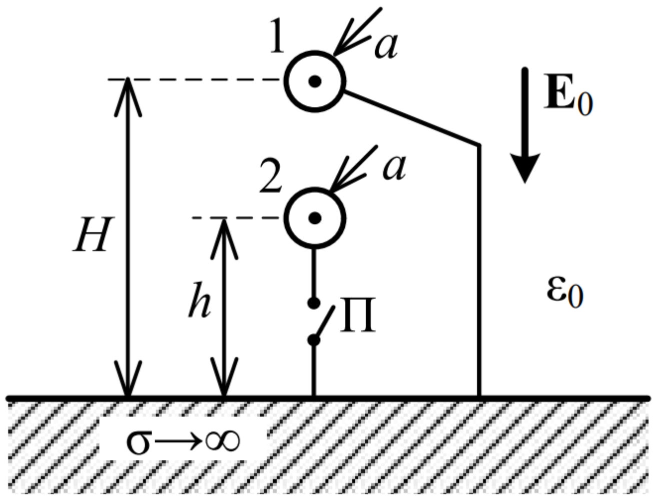
$$C' = \frac{1}{a_{11} - \frac{2a_{12}^2}{a_{11}+a_{13}}} = \boxed{\frac{a_{11}+a_{13}}{a_{11}^2 + a_{11}a_{13} - 2a_{12}^2}}$$

симетрија: $Q_1' = Q_3' \neq -\frac{Q'}{2}$

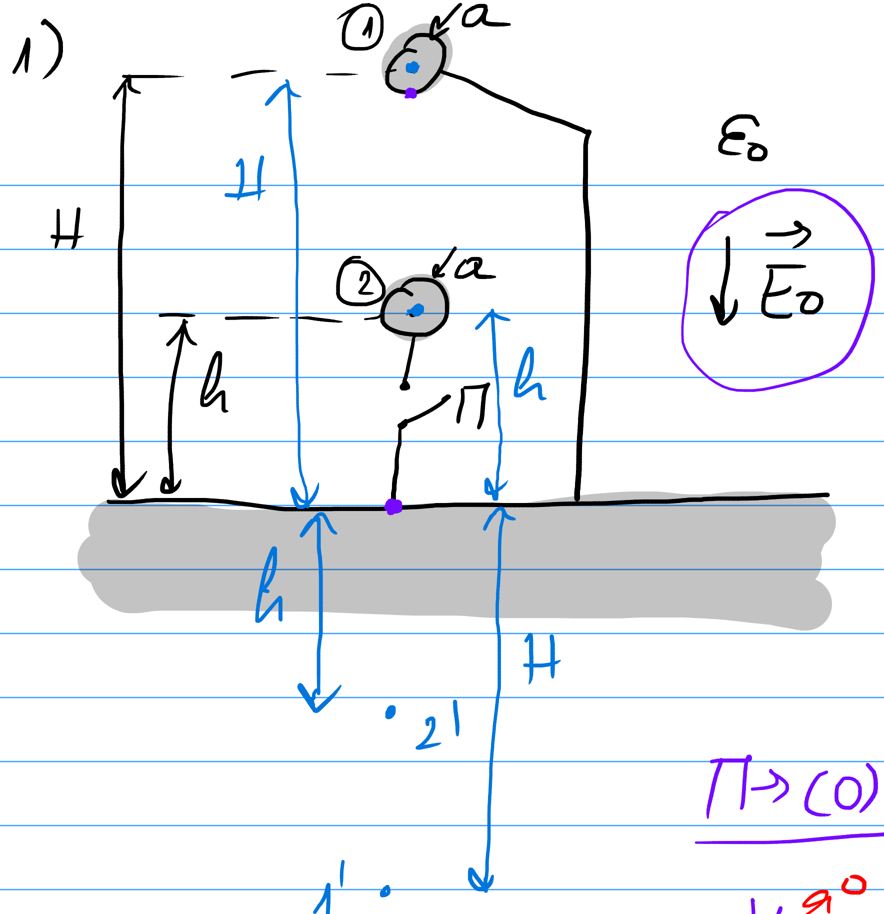
КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

17. новембар 2018.

1. Два веома дугачка паралелна цилиндрична проводника, полупречника попречног пресека a, постављена су у ваздуху један изнад другог, на висинама h и H ($H>h>>a$) изнад бесконачне проводне равни, као на слици. Изнад равни постоји хомогено страно електростатичко поље јачине E_0. Вектор јачине тог електричног поља нормалан је на раван и усмерен ка њој. (а) Одредити коефицијенте потенцијала система проводника. (б) Одредити потенцијал проводника 2 у стационарном стању при отвореном прекидачу П, ако је проводник 2 ненаелектрисан, а проводник 1 галвански спојен са равни танком проводном жицом. (в) Одредити наелектрисање проводника 2 након затварања прекидача и успостављања новог стационарног стања.



1)



$h, H, E_0, a, [a]=?, \quad \Pi \to (0), \; Q_2'=0, \; V_2=?$

$Q_2'(z)=?$

$$\boxed{a_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2H}{a}} \qquad \boxed{a_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2h}{a}}$$

$$\boxed{a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{H+h}{H-h}}$$

$\Pi \to (0), \; Q_2'=0, \; V_1=0$

$$\cancel{V_1}^{\,0} = a_{11} Q_1' + \cancel{a_{12} Q_2'}^{\,0} + E_0 H \qquad Q_1' = -\frac{E_0 H}{a_{11}}$$

$$V_2 = a_{21} Q_1' + \cancel{a_{22} Q_2'}^{\,0} + E_0 h$$

$$\boxed{V_2 = E_0 \left(h - H \frac{a_{21}}{a_{11}} \right)}$$

$$V = \int_A^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$\Pi \to (\not z)$

$$\cancel{V_1}^{\,0} = a_{11}Q_1' + a_{12}Q_2' + E_0H$$
$$\cancel{V_2}^{\,0} = a_{21}Q_1' + a_{22}Q_2' + E_0h$$

$V_1 = V_2 = 0$

$$0 = a_{11}Q_1' + a_{12}Q_2' + E_0H \quad / \cdot a_{21}$$
$$0 = a_{21}Q_1' + a_{22}Q_2' + E_0h \quad / \cdot a_{11}$$

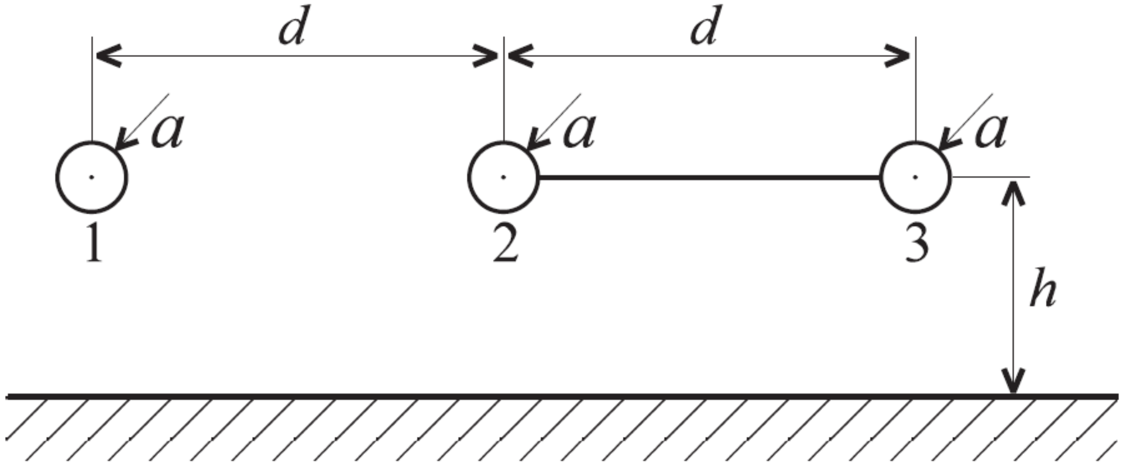
$-$

$$0 = a_{12}^2 Q_2' + E_0H a_{12} - a_{11}a_{22}Q_2' - E_0h a_{11}$$

$$Q_2'(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) + E_0(Ha_{12} - ha_{11}) = 0$$

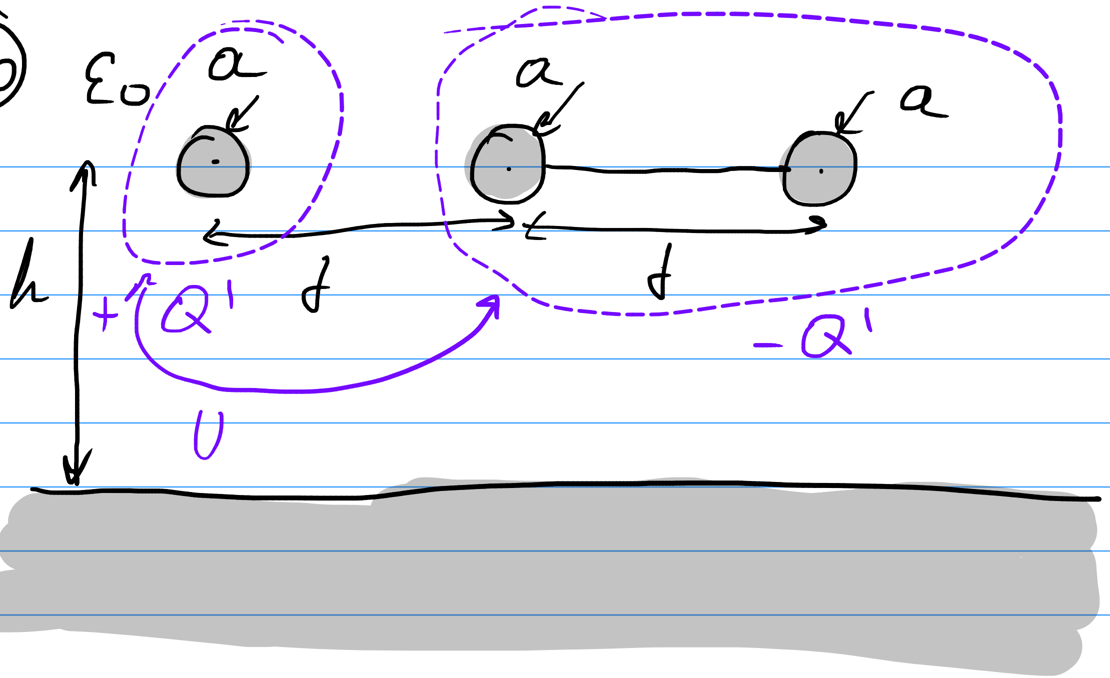
$$\boxed{Q_2' = \frac{-E_0(Ha_{12} - ha_{11})}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}$$

40. Tri tanka veoma dugačka paralelna žičana provodnika postavljena su u vazduhu paraleleno provodnoj ravni. Poprečni presek sistema je prikazan na slici 40. Poluprečnik svake žice je $a = 1$ mm. Ravan provodnika je na odstojanju $h = 20$ mm od provodne ravni, a rastojanje između osa susednih žica iznosi $d = 40$ mm. Druga i treća žica su galvanski povezane. Izračunati podužnu kapacitivnost voda čiji jedan provodnik predstavlja žica 1, a drugi galvanski povezane žice 2 i 3, u prisustvu provodne ravni. (*Z970615*)



Slika 40.

40



$a = 1\,mm,\ h = 20\,mm,\ d = 40\,mm,\ C' = ?$

$$a_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2h}{a} = 6{,}63 \cdot 10^{10} \frac{m}{F}$$

$$a_{22} = a_{33} = 6{,}63 \cdot 10^{10} \frac{m}{F}$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = 6{,}23 \cdot 10^{9} \frac{m}{F}$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{4h^2+4d^2}}{2d} = 2 \cdot 10^{9} \frac{m}{F}$$

$$V_1 = a_{11}Q_1' + a_{12}Q_2' + a_{13}Q_3'$$

$$V_2 = a_{21}Q_1' + a_{22}Q_2' + a_{23}Q_3'$$

$$V_3 = a_{31}Q_1' + a_{32}Q_2' + a_{33}Q_3'$$

$$C' = \frac{Q'}{V_1 - V_2}$$

$$Q_1' = Q'$$

$$Q_2' + Q_3' = -Q'$$

$$V_2 = V_3$$

$$V_1 = a_{11}Q' + a_{12}Q_2' + a_{13}(-Q' - Q_2') = Q'(a_{11} - a_{13}) + Q_2'(a_{12} - a_{13})$$

$$V_2 = a_{12}Q' + a_{11}Q_2' + a_{12}(-Q' - Q_2') = Q_2'(a_{11} - a_{12})$$

$$-\quad V_2 = a_{13}Q' + a_{12}Q_2' + a_{11}(-Q' - Q_2') = Q'(a_{13} - a_{11}) + Q_2'(a_{12} - a_{11}) \quad -$$

$$V_1 - V_2 = 2Q'(a_{11} - a_{13}) + Q_2'(a_{11} - a_{13})$$

$$0 = 2Q_2'(a_{11} - a_{12}) - Q'(a_{13} - a_{11})$$

$$Q_2' = Q' \frac{a_{13} - a_{11}}{2(a_{11} - a_{12})}$$

$$V_1 - V_2 = Q'\left(2(a_{11} - a_{13}) + \frac{a_{13} - a_{11}}{2(a_{11} - a_{12})}(a_{11} - a_{13})\right)$$

$$V_1 - V_2 = Q'(a_{11} - a_{13})\left(2 + \frac{a_{13} - a_{11}}{2(a_{11} - a_{12})}\right)$$

$$C' = \frac{Q'}{V_1 - V_2} = \frac{1}{(a_{11} - a_{13})\left(2 + \frac{a_{13} - a_{11}}{2(a_{11} - a_{12})}\right)} = \boxed{10{,}6\ \frac{pF}{m}}$$

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

15. јануар 2019.

1. Полазећи од потпуног система диференцијалних једначина електростатичког поља и диференцијалне везе између вектора јачине електричног поља и електричног скалар-потенцијала, извести диференцијалну једначину коју задовољава електростатички потенцијал V у линеарној средини, у чијој су свакој тачки познати пермитивност ε и густина слободног наелектрисања ρ, ако је та средина (а) нехомогена и (б) хомогена.

(а)	(б)
$\mathrm{rot}\,\vec{E}=0$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\vec{D}=\rho$ $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ $\quad$ $\vec{E}=-\mathrm{grad}\,V$	

$\mathrm{div}(\varepsilon\vec{E})=\rho \qquad \mathrm{div}(-\varepsilon\,\mathrm{grad}\,V)=\rho \qquad \mathrm{div}(\varepsilon\cdot\mathrm{grad}\,V)=-\rho$

$$\boxed{\mathrm{div}(f\cdot\vec{A}) = f\cdot\mathrm{div}\,\vec{A}+\mathrm{grad}\,f\cdot\vec{A}}$$

$$\varepsilon \operatorname{div}(\operatorname{grad} V) + \operatorname{grad}\varepsilon \cdot \operatorname{grad} V = -\rho$$

$$\boxed{\Delta V + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad}\varepsilon = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$ нехомогена средина

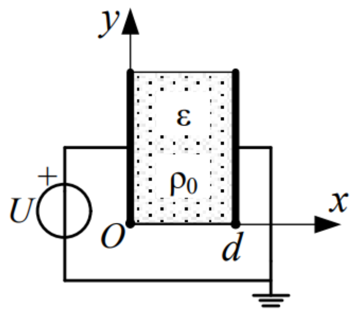
хомогена средина $\varepsilon = const. \Rightarrow \operatorname{grad}\varepsilon = 0$

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$ хомогена средина

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

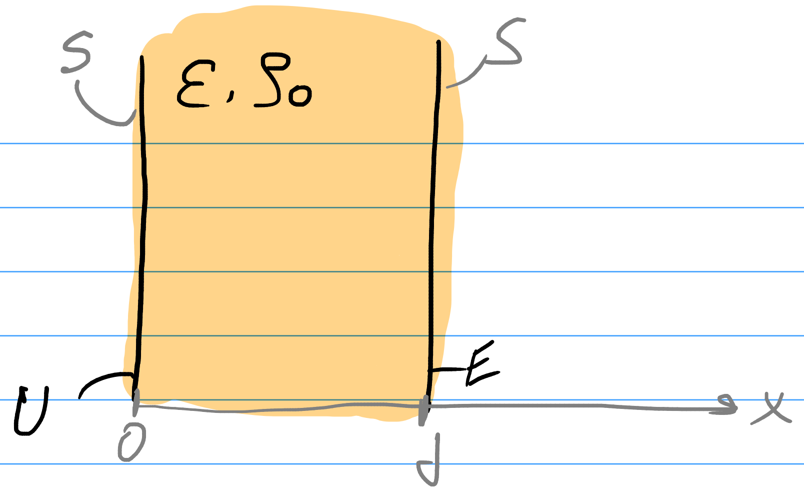
27. јануар 2023.

1. Плочасти кондензатор има две танке металне електроде површине S, постављене на растојању d, као на слици. Диелектрик плочастог кондензатора је линеаран и хомоген, пермитивности ε, а у њему постоји запреминско слободно наелектрисање константне густине ρ_0. Кондензатор је прикључен на извор сталног напона U. (а) Решавањем Поасонове једначине одредити електростатички потенцијал, V, у диелектрику кондензатора, ако је десна електрода на нултом потенцијалу. (б) Користећи претходни резултат, одредити вектор јачине електричног поља, $\mathbf{E}$, у диелектрику кондензатора. Занемарити ивичне ефекте.



(а)	(б)

1)



$\varepsilon, \rho_0, \; V(x=d)=0, \; V(x=0)=U,$

$V(x)=?, \; \vec{E}(x)=?$

$$\Delta V = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \qquad V=V(x)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon}, \qquad x\in(0,d)$$

$$d\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon}dx \;\Big/ \int$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon}\int dx = -\frac{\rho_0 x}{\varepsilon} + C_1$$

$$dV = -\frac{\rho_0}{\varepsilon}x\,dx + C_1 dx \;\Big/ \int$$

$$V = -\frac{\rho_0}{\varepsilon}\int x\,dx + C_1\int dx = -\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon} + C_1 x + C_2$$

$$V(x=d)=0 \qquad V(x=0)=U$$

$$V(x=0)=\underline{C_2=U}$$

$$V(x=d)=-\frac{\rho_0 d^2}{2\varepsilon}+C_1 d+U=0 \qquad C_1=\frac{\frac{\rho_0 d^2}{2\varepsilon}-U}{d}=\frac{\rho_0 d}{2\varepsilon}-\frac{U}{d}$$

$$\boxed{V(x)=-\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon}+\frac{\rho_0 d}{2\varepsilon}x-\frac{U}{d}x+U}$$

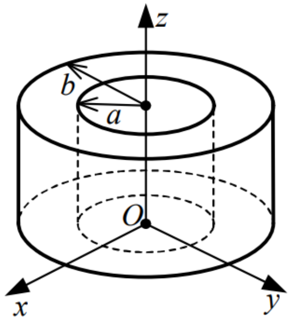
$$\vec{E}=-\operatorname{grad}V=-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}_x$$

$$\vec{E}=-\left(-\frac{\rho_0}{\cancel{2}\varepsilon}\cancel{2}x+\frac{\rho_0 d}{2\varepsilon}-\frac{U}{d}\right)\vec{i}_x=\boxed{\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\left(x-\frac{d}{2}\right)+\frac{U}{d}\right)\vec{i}_x}$$

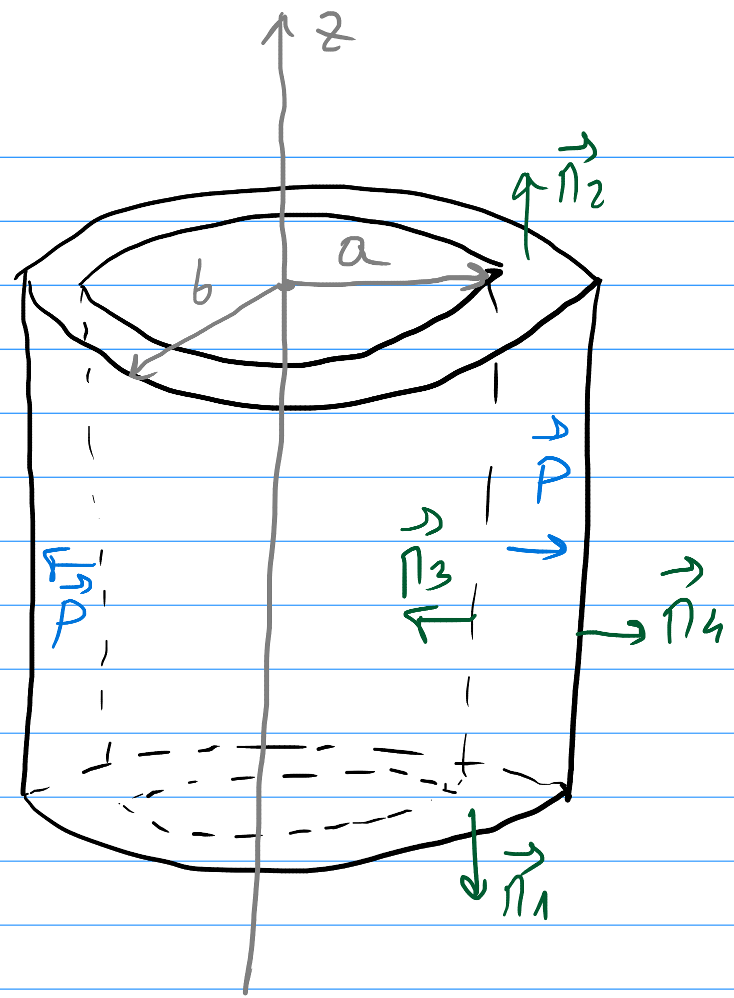
КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ,ОГ)

27. септембар 2021.

1. У шупљем цилиндру од диелекрика, унутрашњег полупречника a и спољашњег полупречника b постоји заостала поларизација. Вектор поларизације је дат изразом у цилиндричном координатном систему, $\mathbf{P} = P_0 (b/r)^2 \, \mathbf{i}_r$, где је P_0 позната константа. Одредити расподелу везаног наелектрисања шупљег цилиндра.



1)



$a, b, \quad \vec{P} = P_0 \frac{b^2}{r^2} \vec{r}, \quad \rho_P = ?, \quad \rho_{PS} = ?$

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\int_V \rho_P \, dv$$

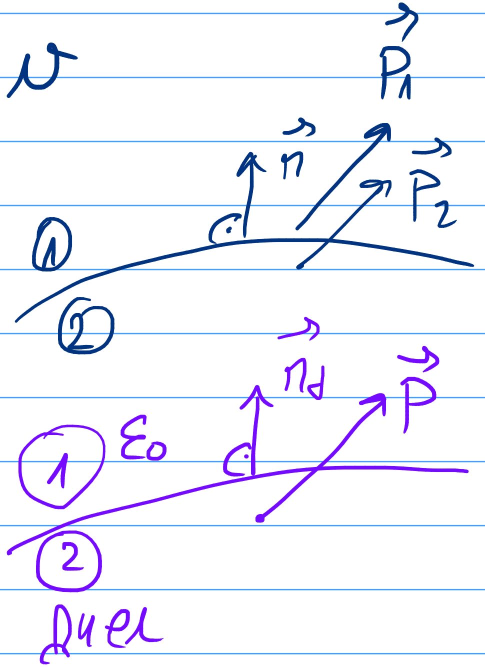
$$-\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_P \, dv$$

$$\boxed{-\operatorname{div} \vec{P} = \rho_P}$$

$$\rho_{PS} = -\vec{n} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)$$

$\vec{P}_1 = 0 \qquad \vec{P}_2 = \vec{P}$

$$\boxed{\rho_{PS} = \vec{n}_d \cdot \vec{P}}$$



$$\vec{P} = P_r \vec{i}_r \qquad \rho_p = -\operatorname{div}\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot P_r)$$

$$\rho_p = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot P_0 \frac{b^2}{r^2}\right) = -\frac{1}{r} P_0 b^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\rho_p = -\frac{P_0 b^2}{r}\left(-\frac{1}{r^2}\right) = \boxed{\frac{P_0 b^2}{r^3}}$$

$$\rho_{ps1} = \vec{n}_1 \cdot \vec{P} = -\vec{i}_z \cdot \vec{P} = \boxed{0} \qquad \rho_{ps2} = \vec{n}_2 \cdot \vec{P} = \vec{i}_z \cdot \vec{P} = \boxed{0}$$

$$\rho_{ps3} = \vec{n}_3 \cdot \vec{P} = -\vec{i}_r \cdot \vec{P}_{(r=a)} = -\vec{i}_r \cdot P_0 \frac{b^2}{a^2}\vec{i}_r = \boxed{-P_0 \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\rho_{ps4} = \vec{n}_4 \cdot \vec{P} = \vec{i}_r \cdot \vec{P}_{(r=b)} = \vec{i}_r \cdot P_0 \vec{i}_r = \boxed{P_0}$$

$$\boxed{Q_p = \int_S \rho_{ps}\, dS + \int_v \rho_p\, dv = 0}$$

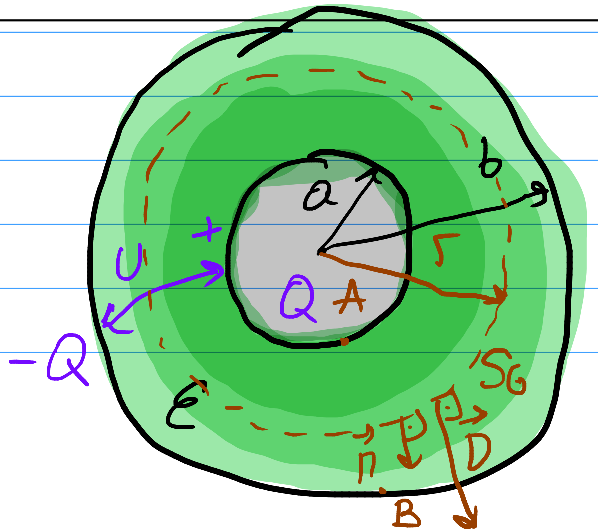
ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

12. септембар 2018.

1. Сферни кондензатор, полупречника проводника a и $b > a$, има савршен нехомоген диелектрик, чија пермитивност зависи само од одстојања r од центра кондензатора као $\varepsilon = \varepsilon_0 (b^2 / r^2)$. Кондензатор је прикључен на извор сталног напона U. Одредити расподелу запреминског везаног наелектрисања у диелектрику.

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = D(r)\, \vec{i}_r \qquad \oint_{S_G} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{uS_G} \qquad D(r)\, 4 r^2 \pi = Q$$



$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q\, r^2}{4\pi r^2 \varepsilon_0 b^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 b^2}$$

$$U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r=a}^{r=b} E(r)\, dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 b^2} \int_a^b dr = \frac{Q(b-a)}{4\pi \varepsilon_0 b^2}$$

$$Q = \frac{4\pi \varepsilon_0 b^2 U}{b-a}$$

$$P = D - \varepsilon_0 E = \frac{Q}{4\pi r^2} - \frac{Q}{4\pi b^2} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

$$P = \frac{\varepsilon_0 b^2 U}{b-a}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right) \qquad \vec{P} = P\vec{i}_r$$

$$\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right)$$

$$\rho_p = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 b^2 U}{b-a}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right)\right)$$

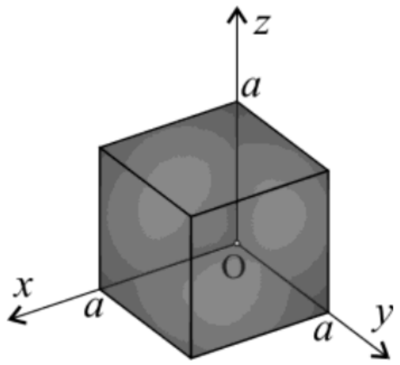
$$\rho_p = -\frac{1}{r^2}\,\frac{\varepsilon_0 b^2 U}{b-a}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(1 - \frac{1}{b^2} r^2\right) = -\frac{\varepsilon_0 \cancel{b^2} U}{r^{\cancel{2}}(b-a)}\left(-\frac{1}{\cancel{b^2}}\, 2\cancel{r}\right)$$

$$\boxed{\rho_p = \frac{2\varepsilon_0 U}{(b-a)r}}$$

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

5. новембар 2011.

2. У коцки од диелектрика дужине странице a, приказаној на слици, познат је вектор поларизације $\mathbf{P} = P_0 \dfrac{x z(z-a)}{a^3}(\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_z)$, где је P_0 константа. Коцка је у вакууму. Одредити расподелу везаних наелектрисања коцке.



ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

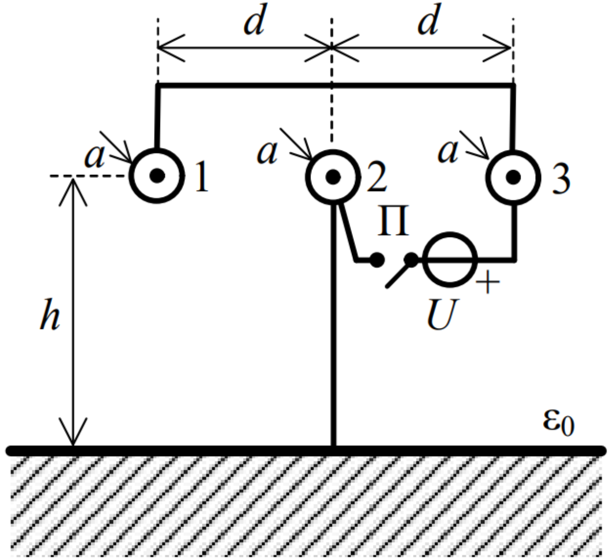
29. јун 2019.

1. Веома дугачак цилиндрични коаксијални кондензатор, полупречника проводника a и b $(b > a)$, има савршен нехомоген диелектрик, чија пермитивност зависи само од одстојања r од центра кондензатора као $\varepsilon = \varepsilon_0 (b^2 / r^2)$. Кондензатор је прикључен на извор сталног напона U. Одредити расподелу запреминског везаног наелектрисања у диелектрику. Занемарити ивичне ефекте.

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ,ОГ)

27. јун 2022.

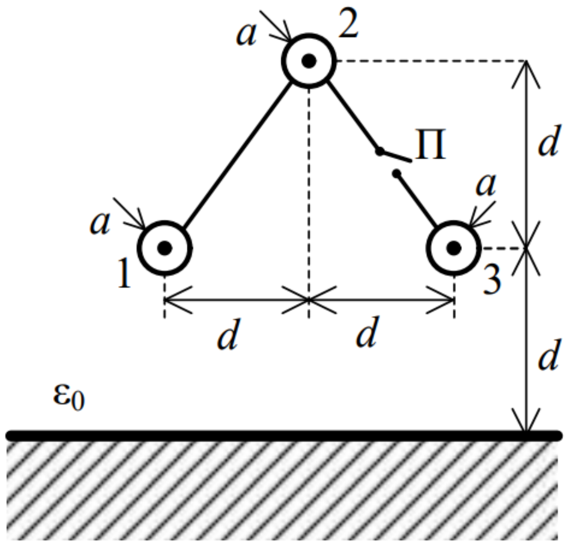
1. Три танка, дугачка, паралелна жичана проводника постављена су у ваздуху на висини $h = 6\,\mathrm{mm}$, паралелно проводној равни, као на слици. Полупречник сваког од проводника је $a = 0{,}5\,\mathrm{mm}$, а њихово међусобно хоризонтално растојање је $d = 4\,\mathrm{mm}$. Проводници 1 и 3 су међусобно галвански спојени. Проводник 2 галвански је спојен са проводном равни. Израчунати (а) коефицијенте потенцијала датог система проводника и (б) подужну капацитивност оваквог вода. (в) Ако се између проводника 2 и 3 прекидачем П прикључи генератор сталног напона $U = 5\,\mathrm{V}$, као на слици, израчунати подужна наелектрисања сва три проводника након успостављања стационарног стања.



КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

11. јануар 2024.

1. Три веома дугачка паралелна цилиндрична проводника, полупречника попречног пресека $a = 1\,\mathrm{mm}$, постављена су у ваздуху, изнад бесконачне проводне равни, као што је приказано на слици, при чему је $d = 50\,\mathrm{mm}$. У првом стационарном стању, проводници 1 и 2, који су галвански повезани, налазе се на потенцијалу $V^{(1)} = 2\,\mathrm{V}$, а проводник 3 је ненаелектрисан. (а) Израчунати коефицијенте потенцијала овог система проводника. (б) Израчунати подужне густине наелектрисања проводника 1 и 2 у првом стационарном стању, $Q_1'^{(1)}$ и $Q_2'^{(1)}$. Друго стационарно стање се успоставља након затварања прекидача П. (в) Израчунати потенцијале проводника у другом стационарном стању.



КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

11. јануар 2024.

2. У шупљем полукружном правом цилиндру од диелектрика, полупречника a и b и висине h, познат је вектор поларизације у цилиндричном координатном систему, $\mathbf{P} = P_0 (a/r)^2\, \mathbf{i}_r$, $a \le r \le b$, $0 \le z \le h$, где је P_0 константа. Одредити расподелу запреминских и површинских везаних наелектрисања цилиндра.