КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ,ОГ)

22. август 2022.

2. (а) Написати математички исказ Стоксове теореме. (б) Полазећи од ове теореме и интегралних једначина за стационарно магнетско поље, извести диференцијални облик уопштеног Амперовог закона.

(а)	(б)
С.Т. $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S}$ Т.Г.О. $\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_v \mathrm{div}\vec{A}\, dv$	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ $\boxed{\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}}$ $\mathrm{div}\vec{B} = 0$

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ,ОГ)

27. септембар 2021.

У вакууму

2. (а) Написати потпун систем диференцијалних једначина за стационарно магнетско поље. (б) Користећи изразе под (а) и везу вектора магнетске индукције и магнетског вектор-потенцијала, извести диференцијалну једначину коју задовољава тај потенцијал у вакууму у којем постоје запреминске стационарне струје вектора густине **J** .

(а)

$$\operatorname{div}\vec{B}=0$$

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$$

(б)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A})=\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=(\nabla\cdot\vec{A})\nabla-(\nabla\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A})-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{J}$$

$$\operatorname{div}\vec{A}=0$$

$$\boxed{\Delta\vec{A}=-\mu_0\vec{J}}$$

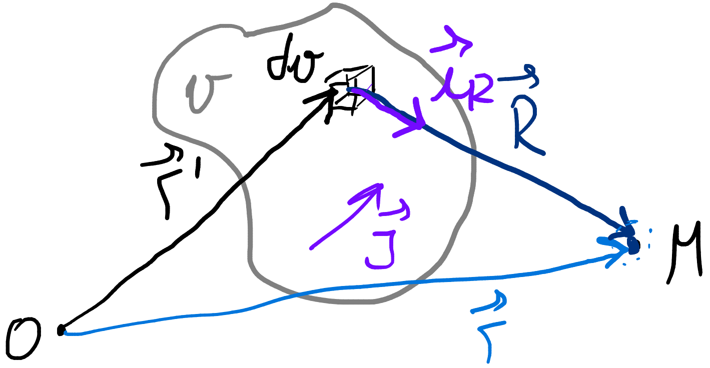
Решење једначине:

$$\boxed{\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_v\frac{\vec{J}\,dv}{R}}$$

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ,ОГ)

15. септембар 2021.

2. Полазећи од израза за магнетски вектор-потенцијал стационарних запреминских струја у вакууму, извести Био-Саваров закон.



$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,' \qquad R=|\vec{r}-\vec{r}\,'|$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\,dv}{R}$$

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\vec{B}(\vec{r})=\operatorname{rot}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\,dv}{R}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{R}\right)dv$$

$$\operatorname{rot}(f\vec{A})=f\operatorname{rot}\vec{A}+\operatorname{grad}f\times\vec{A}=f\operatorname{rot}\vec{A}-\vec{A}\times\operatorname{grad}f$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{R}\right) = \cancel{\frac{1}{R}\,\mathrm{rot}\left(\vec{J}(\vec{r}\,')\right)}^{\,0} - \vec{J}(\vec{r}\,') \times \mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right) =$$

$$= -\vec{J}(\vec{r}\,') \times \left(\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)\vec{i}_R\right) =$$

$$= -\vec{J}(\vec{r}\,') \times \left(-\frac{1}{R^2}\,\vec{i}_R\right)$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times \vec{i}_R}{R^2}\,dv}$$

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

17. јануар 2022.

2. (а) Написати потпун систем диференцијалних једначина за стационарно магнетско поље у немагнетској средини у којој је познат вектор густине струје $\mathbf{J}$, као и везу између вектора магнетске индукције и магнетског вектор-потенцијала. (б) Проверити да ли може постојати стационарно магнетско поље чији је вектор индукције дат изразом у Декартовом координатном систему $\mathbf{B} = B_0\left[(xy/a^2)\,\mathbf{i}_x + (zy^2/b^3)\right]\mathbf{i}_z$, где су a, b и B_0 познате константе.

(а)

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

(б)

$$\vec{B} = B_0\left(\frac{xy}{a^2}\vec{i}_x + \frac{zy^2}{b^3}\vec{i}_z\right)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = B_0\frac{y}{a^2} + \frac{B_0 y^2}{b^3} \neq 0$$

$\boxed{\text{Не може}}$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

16. јануар 2018.

3. Вектор магнетске индукције сталног магнетског поља дат је изразом у Декартовом координатном систему: $\mathbf{B} = B_0(\frac{y^2}{a^2} - \frac{z}{2a})\mathbf{i}_x$, где су a и B_0 познате константе и $0 \le x, y, z \le a$. Средина је немагнетска. Одредити вектор густине запреминских струја у домену $0 \le x, y, z \le a$.

$$\vec{B} = B_0\left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{z}{2a}\right)\vec{i}_x, \quad \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\vec{B}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{i}_y - \frac{\partial B_x}{\partial y}\vec{i}_z\right)$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}B_0\left(-\frac{1}{2a}\vec{i}_y - \frac{2y}{a^2}\vec{i}_z\right) = \boxed{\frac{B_0}{\mu_0 a}\left(-\frac{1}{2}\vec{i}_y - \frac{2y}{a}\vec{i}_z\right)}$$

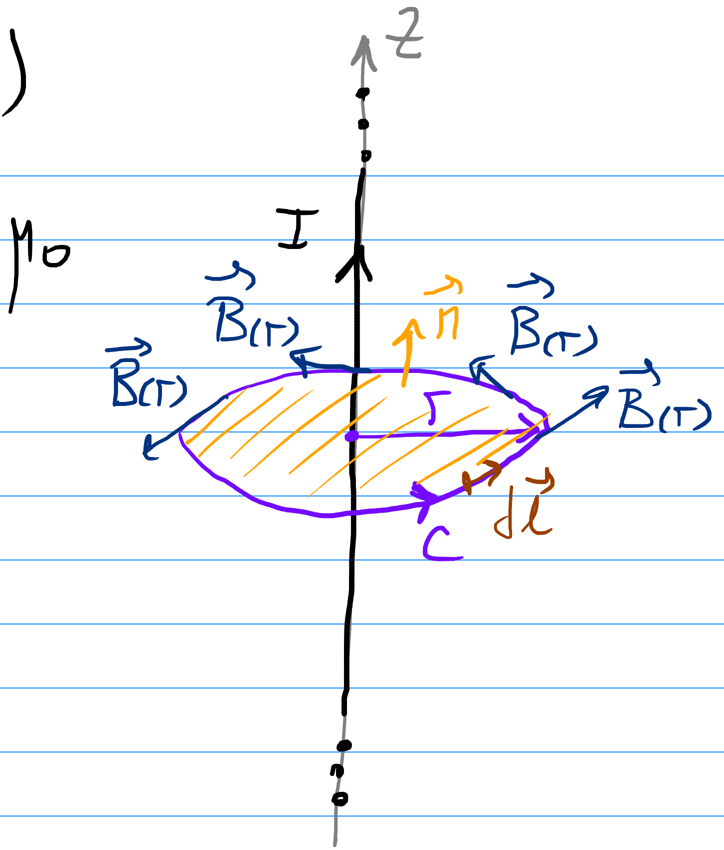
КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ)

5. јун 2023.

4. Бесконачно дугачка права нит, у којој постоји стална струја I, постављена је, у вакууму, дуж z-осе цилиндричног координатног система. (а) Извести израз за вектор магнетске индукције ове нити. (б) Полазећи од овог израза показати да важе основне диференцијалне једначине стационарног магнетског поља, у свим тачкама изван нити.

(а)	(б)

4)



$\vec{B} = ?$ $\qquad \vec{B} = B(r)\,\vec{i}_\varphi$ (симетрија)

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{кроз } C}$$

$$\oint_C B(r)\, dl = \mu_0 I$$

$$B(r)\oint_C dl = \mu_0 I \qquad B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

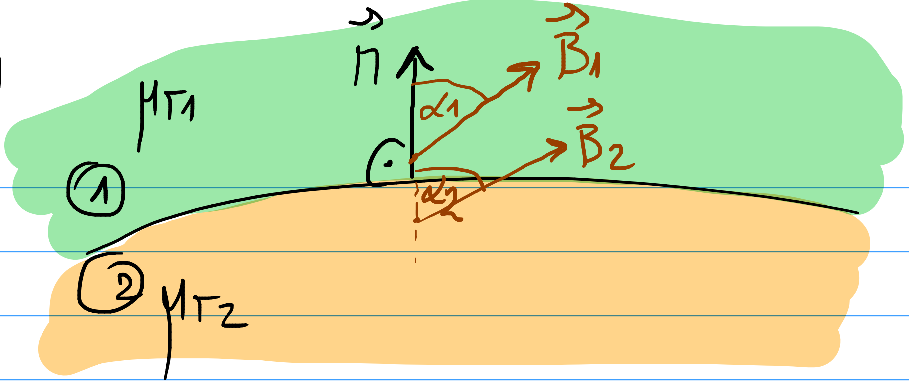
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{i}_\varphi}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \qquad \boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{J} = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_\varphi)\,\vec{i}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)\vec{i}_z = 0 \qquad \boxed{\operatorname{rot}\vec{B} = 0}$$

163. Napisati granične uslove za stacionarno magnetsko polje. Polazeći od tih uslova, izvesti pravilo prelamanja linija magnetskog polja na razdvojnoj površi dve linearne sredine permeabilnosti μ_1 i μ_2 ako na toj površi nema kondukcionih struja. (*P900407*)

163



$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{n}\times(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \vec{n}\cdot(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

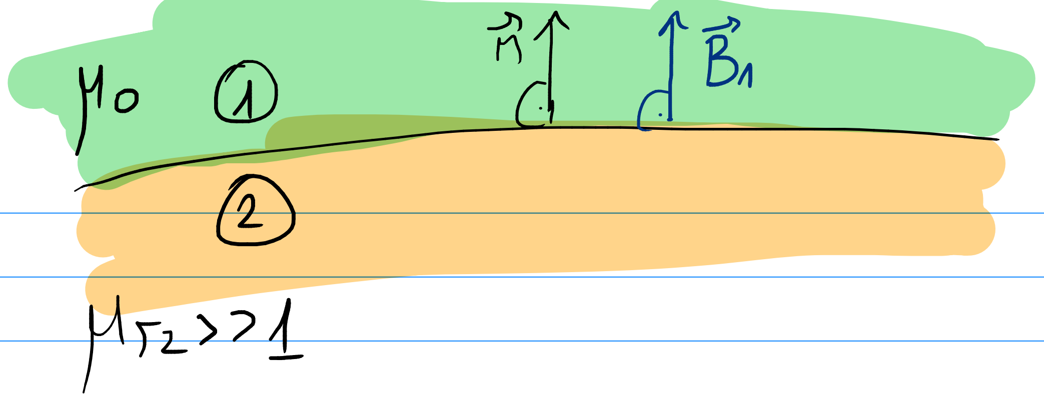
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

$$\vec{J}_s = 0 \Rightarrow H_{1t} = H_{2t}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{B_{2t}}{B_{2n}} \qquad \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{B_{1t}\,\cancel{B_{2n}}}{\cancel{B_{1n}}\,B_{2t}} = \frac{\cancel{\mu_0}\mu_{r1}\cancel{H_{1t}}}{\cancel{\mu_0}\mu_{r2}\cancel{H_{2t}}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}}$$



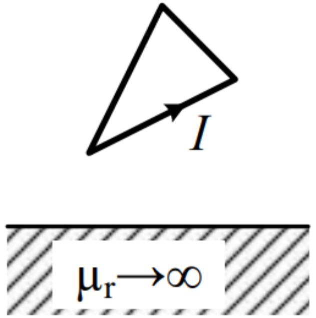
$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} \approx 0$$

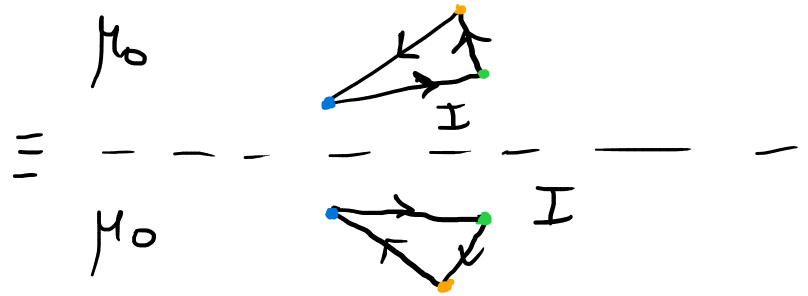
$$tg\alpha_1 \simeq 0 \qquad \alpha_1 = 0$$

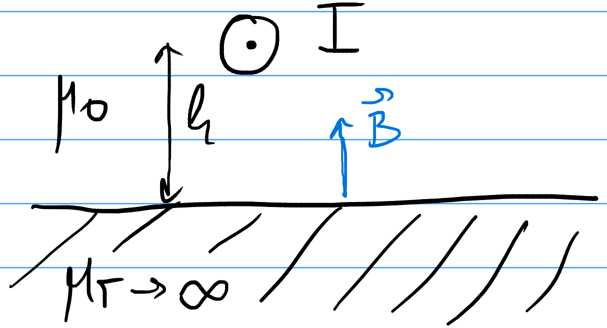
КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

9. јануар 2020.

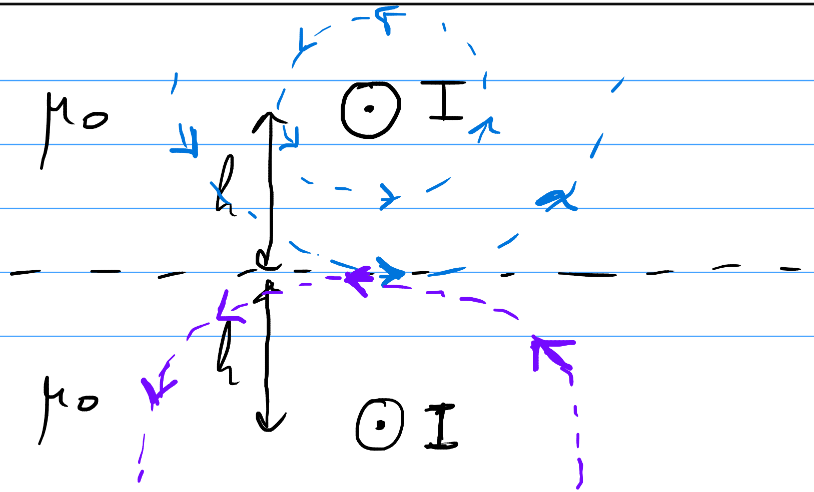
3. На примеру троугаоне жичане контуре, у којој постоји стационарна струја јачине I и која се налази у вакууму изнад равног бесконачно великог феромагнетика, илустровати теорему ликова за стационарно магнетско поље.







=

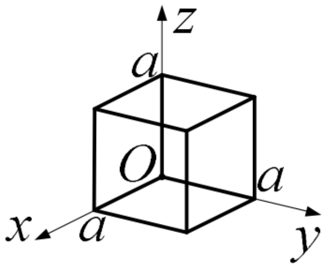


маг. поље у горњем полупростору исто у оба система

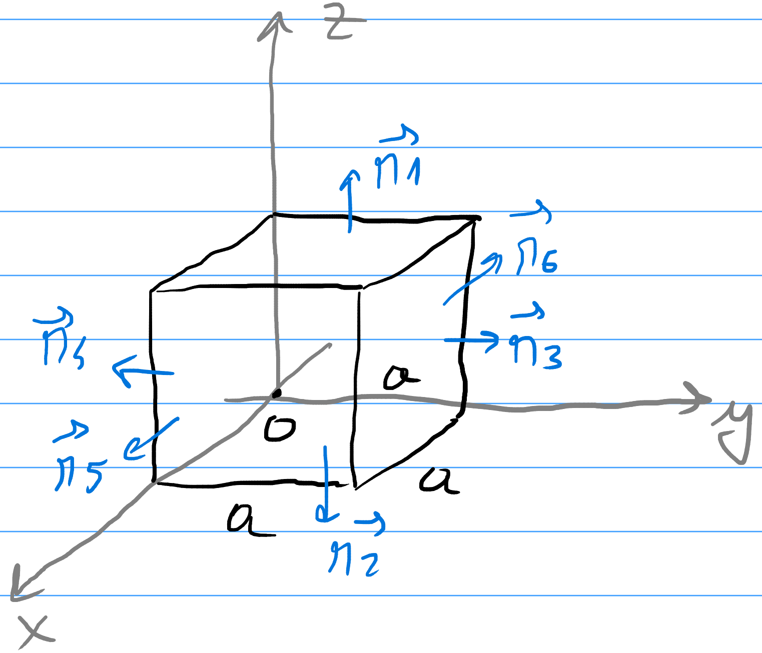
КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

15. јануар 2019.

3. (а) У коцки од феромагнетика дужине странице a, приказаној на слици, познат је вектор магнетизације $M = M_0 \frac{(z-a)x^2}{a^3} \mathbf{i}_y$, где је M_0 константа. Коцка се налази у ваздуху. Одредити расподелу Амперових струја коцке.



③ $\vec{M} = M_0 \dfrac{(z-a)x^2}{a^3}\vec{i}_y$, $\vec{J}_A = ?$, $\vec{J}_{SA} = ?$



$$\vec{J}_A = \mathrm{rot}\,\vec{M} \qquad \vec{J}_{SA} = \vec{M}\times\vec{n}$$

$$\vec{J}_A = -\frac{\partial M_y}{\partial z}\vec{i}_x + \frac{\partial M_y}{\partial x}\vec{i}_z$$

$$\boxed{\vec{J}_A = -\frac{M_0 x^2}{a^3}\vec{i}_x + \frac{2M_0 x(z-a)}{a^3}\vec{i}_z}$$

$$\vec{J}_{SA1} = \vec{M}(z=a)\times\vec{i}_z = 0\,\vec{i}_y\times\vec{i}_z = \boxed{0}$$

$$\vec{J}_{SA2} = \vec{M}(z=0)\times(-\vec{i}_z) = \cancel{-}\frac{aM_0x^2}{a^3}\vec{i}_y\times(\cancel{-}\vec{i}_z) = \boxed{\frac{M_0x^2}{a^2}\vec{i}_x}$$

$$\vec{J}_{SA3} = \vec{M}(y=a)\times\vec{i}_y = \boxed{0}$$

$$\vec{J}_{SA4} = \vec{M}(y=0) \times (-\vec{i}_y) = \boxed{0}$$

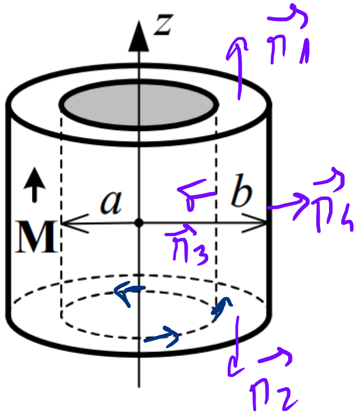
$$\vec{J}_{SA5} = \vec{M}(x=a) \times \vec{i}_x = M_0 \frac{(z-a)\cancel{a^2}}{a^{\cancel{3}}} \vec{i}_y \times \vec{i}_x = \boxed{-M_0 \frac{z-a}{a} \vec{i}_z}$$

$$\vec{J}_{SA6} = \vec{M}(x=0) \times (-\vec{i}_x) = 0\, \vec{i}_y \times (-\vec{i}_x) = \boxed{0}$$

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ)

7. јун 2021.

2. У шупљем ваљку од феромагнетика, унутрашњег и спољашњег полупречника a и b, респективно, постоји заостала магнетизација. Вектор магнетизације дат је изразом у цилиндричном координатном систему, $\mathbf{M} = M_0 \ln(b/r)\mathbf{i}_z$. Одредити расподелу Амперових струја ваљка.



$$\vec{J}_A = \mathrm{rot}\vec{M} \qquad \vec{M} = M_z\vec{i}_z = M_z(r)\,\vec{i}_z$$

$$\vec{J}_A = -\frac{\partial M_z}{\partial r}\vec{i}_\varphi = -\frac{\partial}{\partial r}\left(M_0 \ln\frac{b}{r}\right)\vec{i}_\varphi$$

$$\vec{J}_A = \cancel{-} M_0 \frac{\cancel{r}}{\cancel{b}} b \left(\cancel{-}\frac{1}{r^{\cancel{2}}}\right)\vec{i}_\varphi = \boxed{\frac{M_0}{r}\vec{i}_\varphi}$$

$$\vec{J}_{sA} = \vec{M}\times\vec{n} \qquad \vec{J}_{sA1} = \vec{M}\times\vec{i}_z = \boxed{0} \qquad \vec{J}_{sA2} = \vec{M}\times(-\vec{i}_z) = \boxed{0}$$

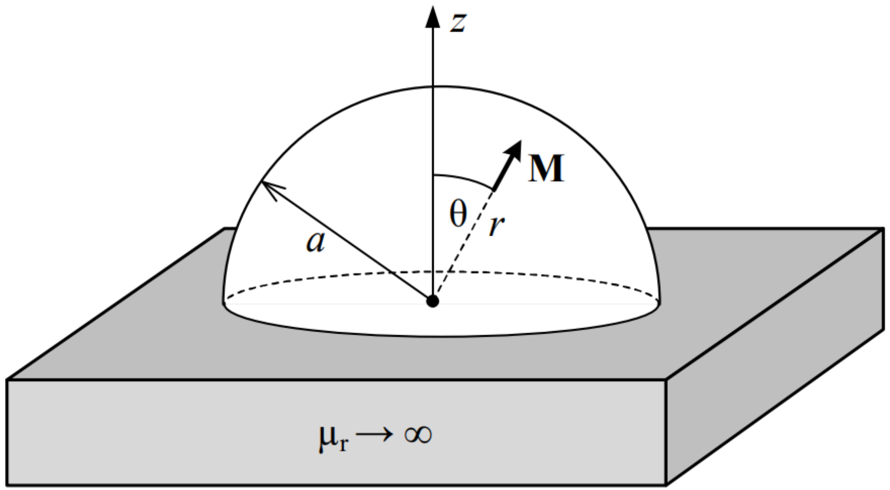
$$\vec{J}_{SA3} = \vec{M}(r=a) \times (-\vec{i}_r) = M_0 \ln\frac{b}{a}\, \vec{i}_z \times (-\vec{i}_r) = \boxed{-M_0 \ln\frac{b}{a}\, \vec{i}_\varphi}$$

$$\vec{J}_{SA4} = \vec{M}(r=b) \times \vec{i}_r = 0\, \vec{i}_z \times \vec{i}_r = \boxed{0}$$

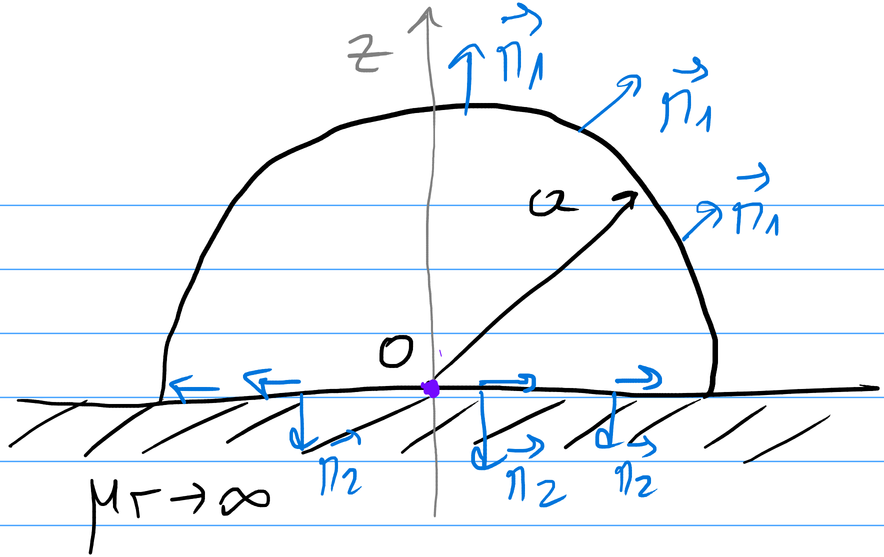
КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

27. јануар 2023.

2. Полулопта од феромагнетика, полупречника a, налази се у ваздуху и лежи (својом равном површи) на бесконачном блоку, сачињеном од јаког феромагнетика. Полулопта је намагнетисана по запремини, а вектор магнетизације дат је изразом $\mathbf{M} = M_0 (r/a)\mathbf{i}_r$, $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Одредити (а) расподелу Амперових струја полулопте, (б) вектор магнетске индукције у центру лопте и (в) вектор јачине магнетског поља у центру лопте.



2

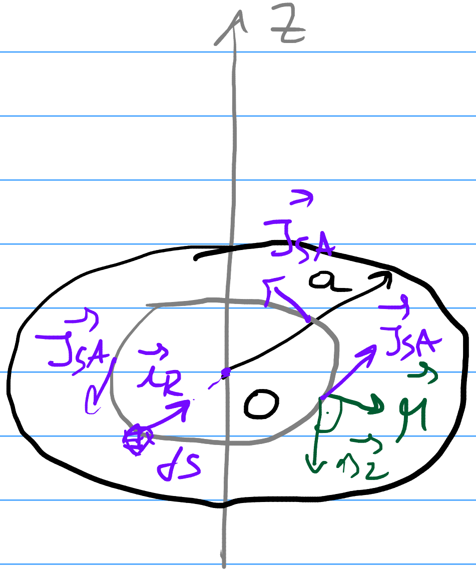


$\vec M = M_0 \frac{r}{a} \vec i_r$, $\vec J_A = ?$, $\vec J_{SA} = ?$, $\vec B = ?$,

$\vec H = ?$

$\vec J_A = \mathrm{rot}\,\vec M \qquad \vec M = M_r(r)\,\vec i_r$

$$\boxed{\vec J_A = 0}$$



$\vec J_{SA} = \vec M \times \vec n \qquad \vec J_{SA1} = \vec M(r=a) \times \vec i_r = \boxed{0}$

$$\vec J_{SA2} = \vec M\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) \times \vec i_\theta = \boxed{M_0 \frac{r}{a} \vec i_\varphi}$$

$\vec J_S = 2 \vec J_{SA2}$ (теорема ликова)

$$\vec J_S = 2 M_0 \frac{r}{a} \vec i_\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{J}_s\, dS \times \vec{i}_R}{R^2} \quad , \quad \vec{i}_R = -\vec{i}_r \qquad \vec{i}_\varphi \times (-\vec{i}_r) = \vec{i}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{i}_z \int_S \frac{2M_0 r}{a R^2} dS \quad , \quad \begin{array}{l} R = r \\ dS = r\,dr\,d\varphi \end{array}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{i}_z \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{r=0}^{r=a} \frac{2M_0 \cancel{r}}{a\, \cancel{r^2}} r\,dr\,d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2M_0}{a}\vec{i}_z \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{r=0}^{r=a} d\varphi\, dr$$

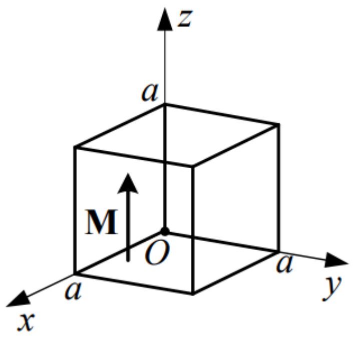
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{2\pi a}\vec{i}_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr = \vec{i}_z \frac{\mu_0 M_0}{2\pi a} 2\pi \cdot a = \boxed{\mu_0 M_0 \vec{i}_z}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \cancel{\vec{M}}^{\,0} \qquad \boxed{\vec{H} = M_0 \vec{i}_z}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

9. септембар 2020.

1. У вакууму постоји заостала магнетизација само по запремини коцке дужине странице a. Вектор магнетизације дат је изразом $\mathbf{M} = M_0(x/a)\mathbf{i}_z$, где је M_0 константа. Одредити Амперове струје коцке.



КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ)

9. април 2023.

4. Одредити (а) ротор и (б) дивергенцију магнетског поља индукције $\mathbf{B} = B_0(2\mathbf{i}_y - \mathbf{i}_x)$ у вакууму и (в) проверити да ли оно задовољава потпун систем диференцијалних једначина за стационарно магнетско поље. Сматрати B_0 познатом константом.

(а)	(б)	(в)

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ)

14. април 2024.

3. Одредити израз за вектор густине запреминских Амперових струја у хомогеном линеарном феромагнетику пермеабилности μ, уколико је у свакој тачки феромагнетика познат вектор (а) густине запреминских кондукционих струја $\mathbf{J}$, односно (б) магнетског вектор-потенцијала $\mathbf{A}$.

(а)	(б)

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ)

14. април 2024.

4. Вектор магнетске индукције сталног магнетског поља дат је изразом у Декартовом координатном систему: $\mathbf{B} = B_0\left(\dfrac{2x^3}{a^3}\mathbf{i}_y + \dfrac{xy}{a^2}\mathbf{i}_z\right)$, где су a и B_0 познате константе и $0 \le x, y, z \le a$. Средина је ваздух. Одредити израз за вектор густине запремисних струја у домену $0 \le x, y, z \le a$.