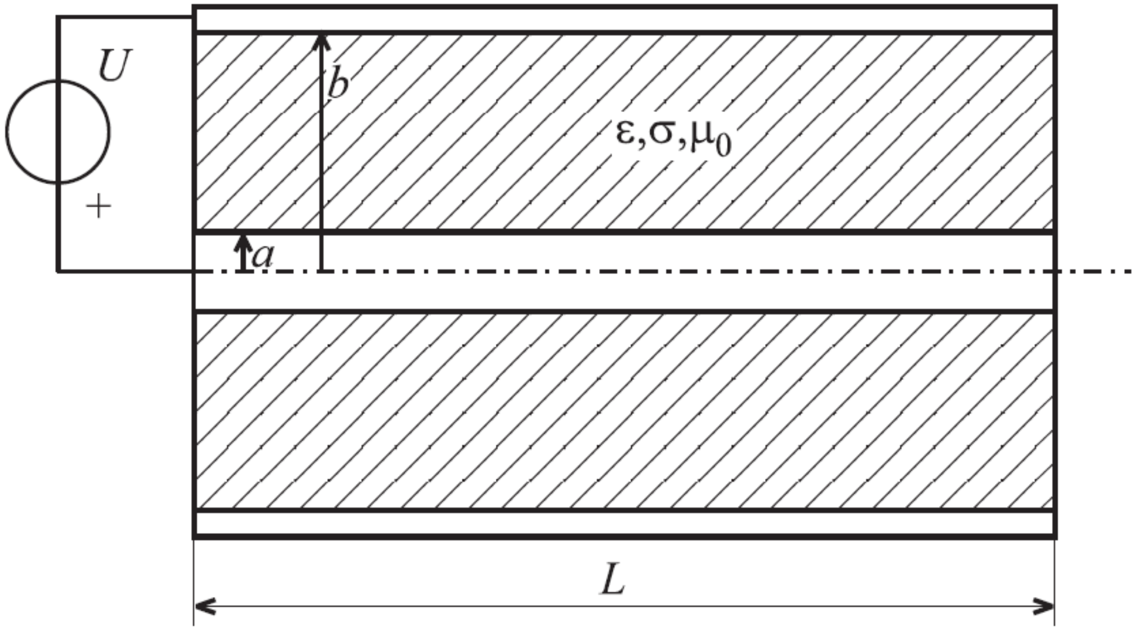
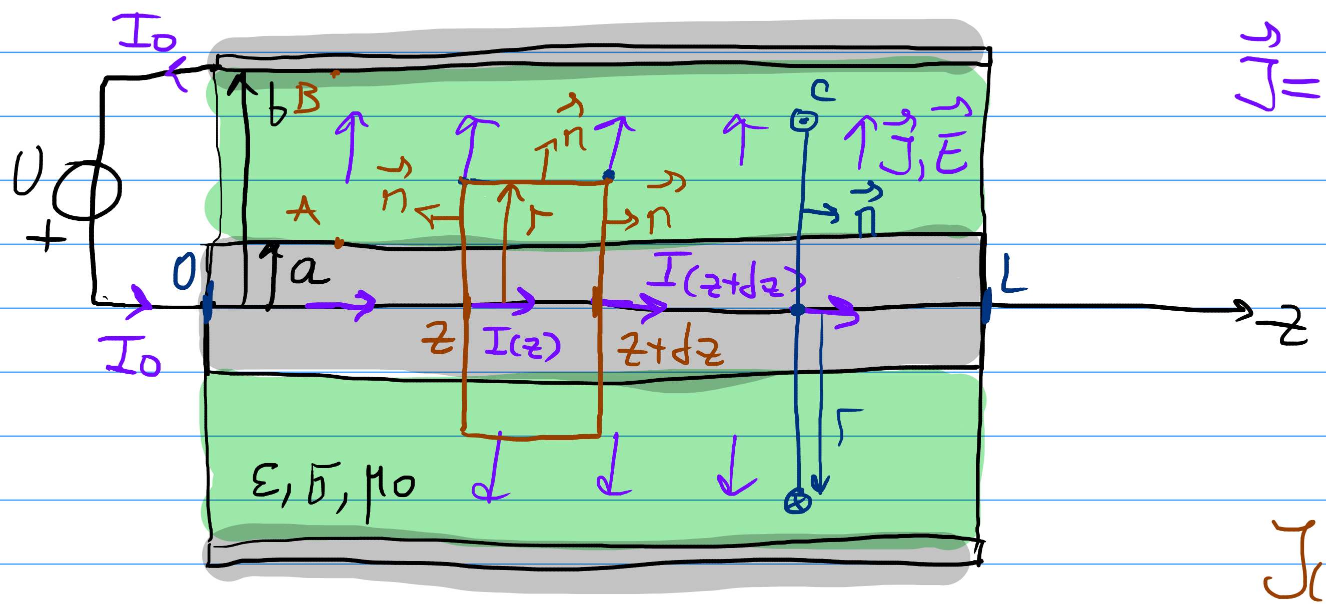
94. Koaksijalni kabl poluprečnika provodnika a i b i dužine L, prikazan na slici 94.1, ispunjen je nehomogenim, nesavršenim dielektrikom parametara $\varepsilon = \varepsilon_0(3 - r/b)$, $\sigma = \sigma_0/(1 + r/a)$ (σ_0 je konstanta) i μ_0. Specifična provodnost provodnika kabla je mnogo veća od specifične provodnosti dielektrika. Kabl je na jednom kraju priključen na idealan generator vremenski konstantnog napona U, a na drugom otvoren. Odrediti: (a) podužnu odvodnost kabla, (b) gustinu zapreminskog slobodnog naelektrisanja u dielektriku kabla i (~~c~~) fluks Pointingovog vektora kroz proizvoljan poprečni presek kabla. (*Z950119*)



Slika 94.1.

94) $a,\ b,\ L,\ \varepsilon=\varepsilon_0\left(3-\frac{r}{b}\right),\ \sigma=\frac{\sigma_0}{1+\frac{r}{a}},\ \mu_0,\ G'=?,\ \rho=?,\ \vec{H}=?$



$\vec{J}=J(r)\,\vec{i}_r$

$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=0$

$-I(z)+I(z+dz)+J(r)\cdot 2r\pi\, dz=0$

$J(r)=\frac{I(z)-I(z+dz)}{dz}\cdot\frac{1}{2\pi r}$

$J(r)=-\frac{I(z+dz)-I(z)}{dz}\cdot\frac{1}{2\pi r}$

$dz\to 0\quad J(r)=-\frac{dI(z)}{dz}\cdot\frac{1}{2\pi r}$

$I_d'=-\frac{dI(z)}{dz}$ подужна густина струје одводности

$G'=\frac{I_d'}{U}\qquad J(r)=\frac{I_d'}{2\pi r}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I_d'}{2\pi r} \, \frac{\left(1+\frac{r}{a}\right)}{\sigma_0} \, \vec{i}_r$$

$$U = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{r=a}^{r=b} E(r)\, dr = \frac{I_d'}{2\pi\sigma_0} \int_a^b \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right) dr = \frac{I_d'}{2\pi\sigma_0}\left(\ln\frac{b}{a} + \frac{b-a}{a}\right)$$

$$I_d' = \frac{\sigma_0 2\pi U}{\ln\frac{b}{a} + \frac{b-a}{a}} \qquad G' = \frac{I_d'}{U} = \boxed{\frac{2\pi\sigma_0}{\ln\frac{b}{a} + \frac{b-a}{a}}} \qquad (G = G'\cdot L)$$

$$\rho = \operatorname{div}\vec{D} = \operatorname{div}(\varepsilon\vec{E})$$

$$\vec{E} = \frac{\left(1+\frac{r}{a}\right)}{\cancel{2\pi} r \cancel{\sigma_0}} \, \frac{\cancel{\sigma_0 2\pi} U}{\ln\frac{b}{a} + \frac{b-a}{a}} \, \vec{i}_r = \frac{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right) U}{\ln\frac{b}{a} + \frac{b-a}{a}} \, \vec{i}_r$$

$$\rho = \operatorname{div}\left(\varepsilon_0\left(3 - \frac{r}{b}\right) \frac{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right) U}{\ln\frac{b}{a} + \frac{b-a}{a}} \, \vec{i}_r\right)$$

$$\rho = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \varepsilon E_r\right)$$

$$\rho = \frac{1}{r}\frac{\varepsilon_0 U}{\ln\frac{b}{a}+\frac{b-a}{a}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\left(3-\frac{r}{b}\right)\right)$$

$$\rho = \frac{\varepsilon_0 U}{\ln\frac{b}{a}+\frac{b-a}{a}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(3-\frac{r}{b}+\frac{3r}{a}-\frac{r^2}{ab}\right)$$

$$\rho = \frac{\varepsilon_0 U}{\ln\frac{b}{a}+\frac{b-a}{a}}\frac{-\frac{1}{b}+\frac{3}{a}-\frac{2r}{ab}}{r} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 U\,(3b-a-2r)}{abr\left(\ln\frac{b}{a}+\frac{b-a}{a}\right)}}$$

$$\vec{H} = H\vec{i}_\varphi = H(z,r)\,\vec{i}_\varphi \qquad \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \qquad H\,2\pi r = I(z)$$

$$\vec{H} = \frac{I(z)}{2\pi r}\vec{i}_\varphi$$

$$I_d' = -\frac{dI}{dz} = G'U \quad \Rightarrow \quad I = -G'U\cdot z + C$$

$$I(z=L)=0$$

$$I(z=L) = -G'UL + C \qquad C = G'UL$$

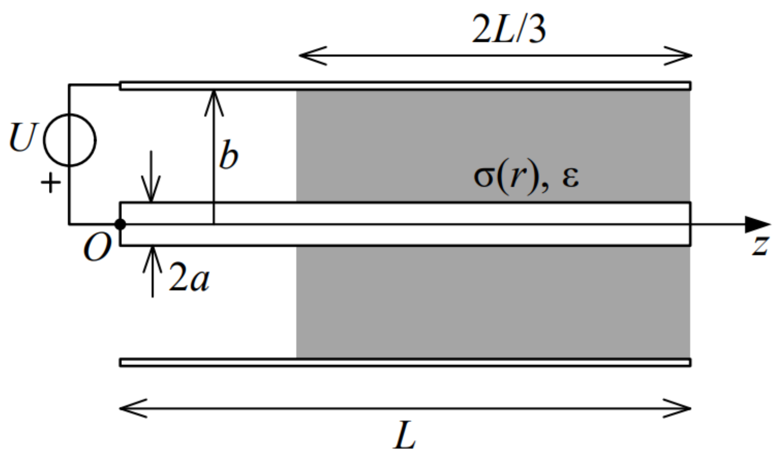
$$I(z) = G'U(L-z)$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\sigma_0 U (L-z)}{r\left(\ln\frac{b}{a} + \frac{b-a}{a}\right)}\,\vec{i}_\varphi}$$

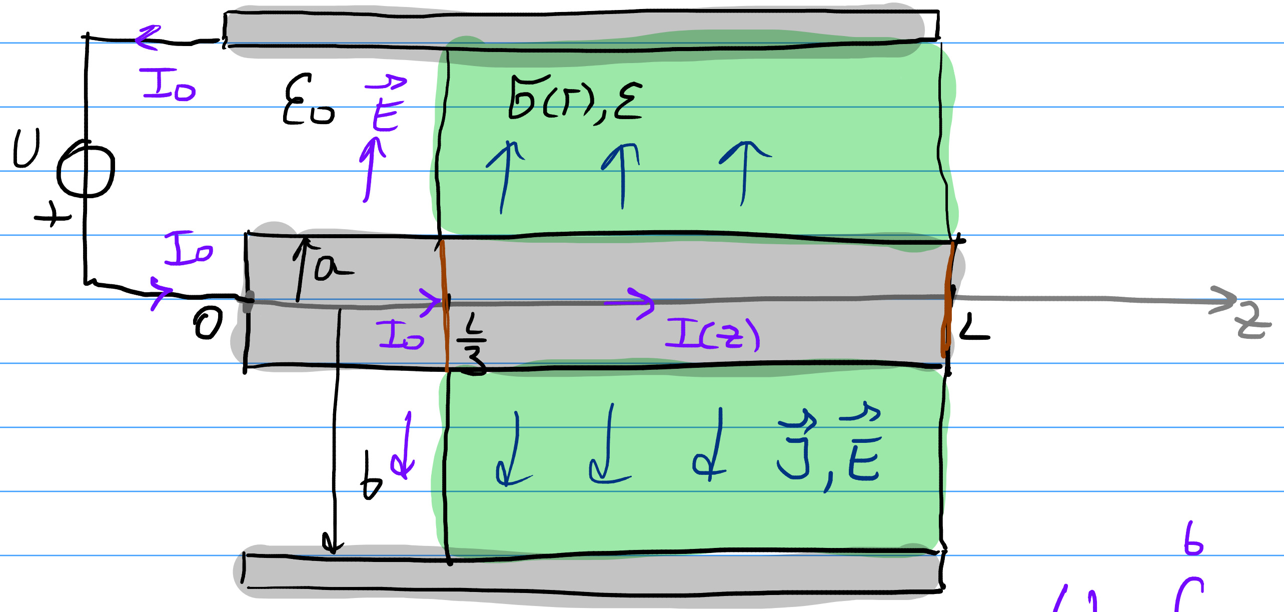
КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ,ОГ)

28. јун 2021.

1. На улаз правог коаксијалног вода дужине L, унутрашњег полупречника a и спољашњег полупречника b, прикључен је генератор временски константног напона U. Унутрашњост вода испуњена је делимично линеарним хомогеним диелектриком, пермитивности $\varepsilon = \text{const}$ и специфичне проводности $\sigma(r) = \sigma_0 (a/r) \mathrm{e}^{-r/a}$, где је r радијална координата у цилиндричном координатном систему, а σ_0 константа. Занемарујући ивичне ефекте, одредити (а) проводност вода и (б) вектор јачине магнетског поља у унутрашњости вода $\mathbf{H}(r,z)$, $a < r < b$, $0 \le z \le L$.



(1) $a, b, L, \sigma = \sigma_0\left(\frac{a}{r}\right)e^{-\frac{r}{a}}, \varepsilon, G = ?, \vec{H} = ?$



$$\boxed{J_{1n} = J_{2n}}, \quad E_{1t} = E_{2t}$$

$z \in \left(0, \frac{L}{3}\right)$ $\quad \vec{J} = 0$

$z \in \left(\frac{L}{3}, L\right)$ $\quad \vec{J}(r) = \frac{I_d'}{2\pi r}\vec{i}_r$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I_d'}{2\pi \cancel{r}} \frac{\cancel{r}}{\sigma_0 a} e^{\frac{r}{a}} \vec{i}_r$$

$$U = \int_a^b E(r)\,dr = \frac{I_d'}{2\pi\sigma_0 a}\int_{r=a}^{r=b} e^{\frac{r}{a}}\,dr$$

$$U = \frac{I_d'}{2\pi\sigma_0 \cancel{a}}\cancel{a}\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{\frac{a}{a}}\right) = \frac{I_d'}{2\pi\sigma_0}\left(e^{\frac{b}{a}} - e\right)$$

$$G' = \frac{I_d'}{U} = \frac{2\pi\sigma_0}{e^{\frac{b}{a}} - e} \qquad G = G'\frac{2L}{3} \qquad \boxed{G = \frac{4\pi\sigma_0 L}{3\left(e^{\frac{b}{a}} - e\right)}}$$

$$\vec{H} = \frac{I(z)}{2\pi r}\vec{i}_\varphi$$

$\underline{z \in (0, \frac{L}{3})}$ $I(z) = I_0$

$\underline{z \in (\frac{L}{3}, L)}$ $I = -G'Uz + C$

$I(z=L) = 0 \Rightarrow C = G'UL$

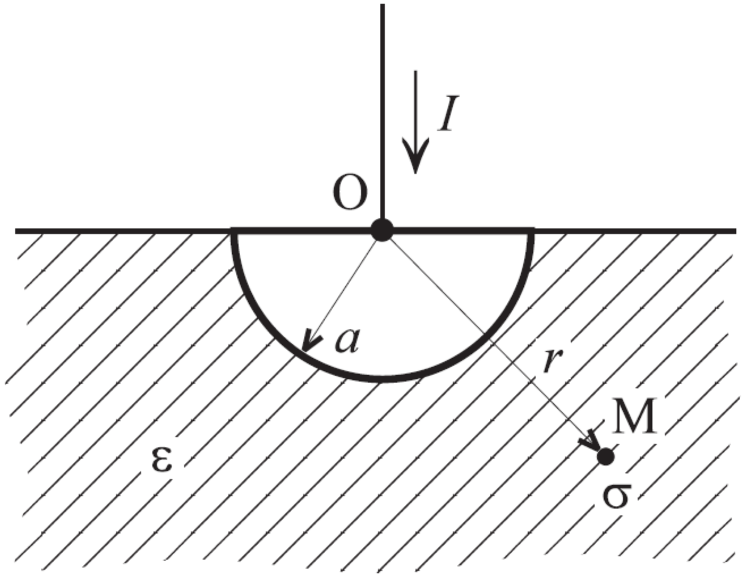
$I(z) = G'U(L-z)$

$I(z=\frac{L}{3}) = G'U\frac{2L}{3} = I_0$

$\underline{z \in (0, \frac{L}{3})}$ $$\boxed{\vec{H} = \frac{G'UL}{3\pi r}\vec{i}_\varphi}$$

$\underline{z \in (\frac{L}{3}, L)}$ $$\boxed{\vec{H} = \frac{G'U(L-z)}{2\pi r}\vec{i}_\varphi}$$

104. Polusferni uzemljivač poluprečnika a nalazi se u zemlji permitivnosti ε i specifične provodnosti $\sigma = \sigma_0\sqrt{a/r}$, gde je σ_0 konstanta (slika 104). Gubici u uzemljivaču su zanemarljivi. Jačina struje uzemljivača je I (stacionarna struja). Odrediti: (a) otpornost uzemljenja uzemljivača, (b) gustinu slobodnog i vezanog površinskog naelektrisanja na polusfernoj površi uzemljivača i (c) gustinu slobodnog i vezanog zapreminskog naelektrisanja u zemlji. (*Z940612*)

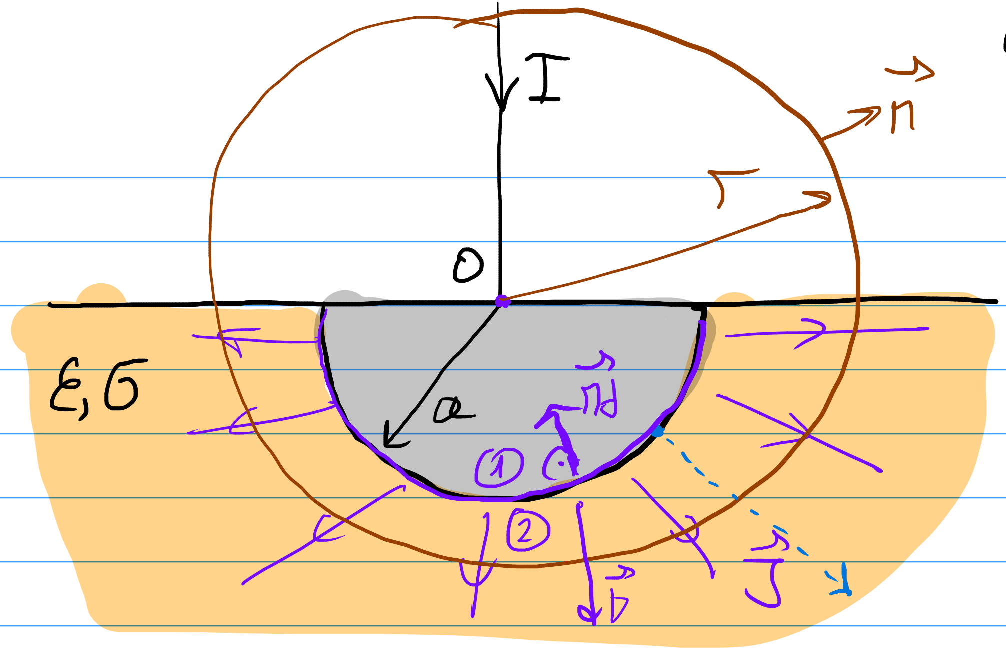


Slika 104.

104

$a,\ \varepsilon,\ \sigma=\sigma_0\sqrt{\frac{a}{r}},\ I,\ R_{uz}=?,\ \rho_s=?,\ \rho_{ps}=?,$

$\rho=?,\ \rho_p=?$



$$\vec{J}=J(r)\,\vec{i}_r$$

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=0$$

$$-I+J(r)\,2r^2\pi=0$$

$$\vec{J}(r)=\frac{I}{2\pi r^2}\vec{i}_r$$

$$\vec{E}(r)=\frac{\vec{J}(r)}{\sigma}=\frac{I}{2\pi\sigma_0 r^2}\sqrt{\frac{r}{a}}\,\vec{i}_r$$

$$R_{uz}=\frac{V_{uz}}{I}\qquad V_{uz}=\int_{r=a}^{r\to\infty}E(r)\,dr=\int_a^{+\infty}\frac{I}{2\pi\sigma_0\sqrt{a}}r^{-\frac{3}{2}}dr=\frac{I}{\cancel{2}\pi\sigma_0\sqrt{a}}\left(\frac{-\cancel{2}}{\sqrt{r}}\right)\Bigg|_a^{+\infty}$$

$$V_{uz}=\frac{I}{\pi\sigma_0\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{I}{a\pi\sigma_0}\qquad R_{uz}=\frac{V_{uz}}{I}=\boxed{\frac{1}{a\pi\sigma_0}}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \frac{I\varepsilon}{2\pi\sigma_0\sqrt{a}}\, r^{-\frac{3}{2}}\, \vec{i}_r \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{I(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\sigma_0\sqrt{a}}\, r^{-\frac{3}{2}}\, \vec{i}_r$$

$$\rho = \mathrm{div}\,\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot D_r\right)$$

$$\rho = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{I\varepsilon}{2\pi\sigma_0\sqrt{a}}\, r^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{I\varepsilon}{2\pi\sigma_0\sqrt{a}}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{1}{2\sqrt{r}} = \boxed{\frac{I\varepsilon}{4\pi\sigma_0\sqrt{a}\, r^{\frac{5}{2}}}}$$

$$\rho_P = -\mathrm{div}\,\vec{P} = \boxed{-\frac{I(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi\sigma_0\sqrt{a}\, r^{\frac{5}{2}}}}$$

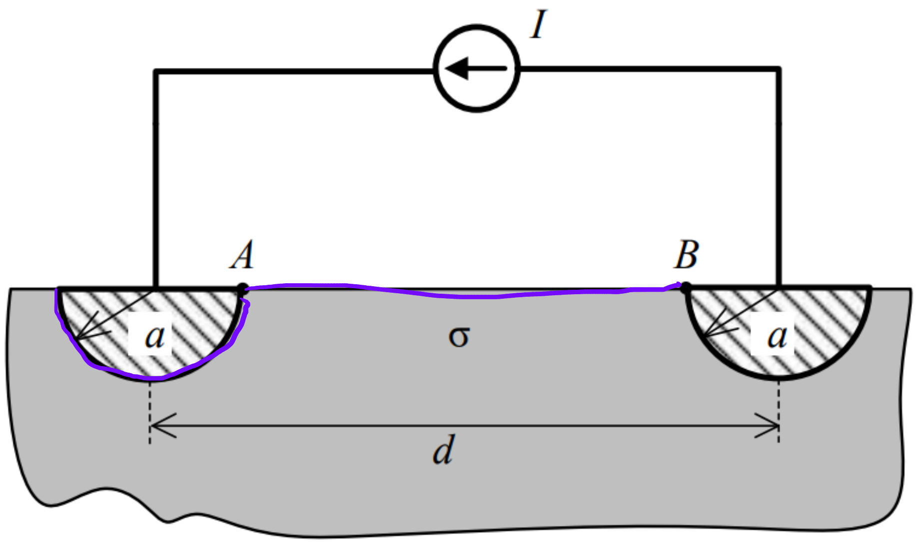
$$\rho_{PS} = \vec{n}_d \cdot \vec{P} = -\vec{i}_r \cdot \vec{P}_{(r=a)} = -\frac{I(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\sigma_0\sqrt{a}}\, a^{-\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{-I(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\sigma_0 a^2}}$$

$$\rho_S = \vec{n} \cdot \left(\cancelto{0}{\vec{D}_1} - \vec{D}_2\right) = \vec{n}_d \cdot (-\vec{D}) = \vec{i}_r \cdot \vec{D} = \boxed{\frac{I\varepsilon}{2\pi\sigma_0 a^2}}$$

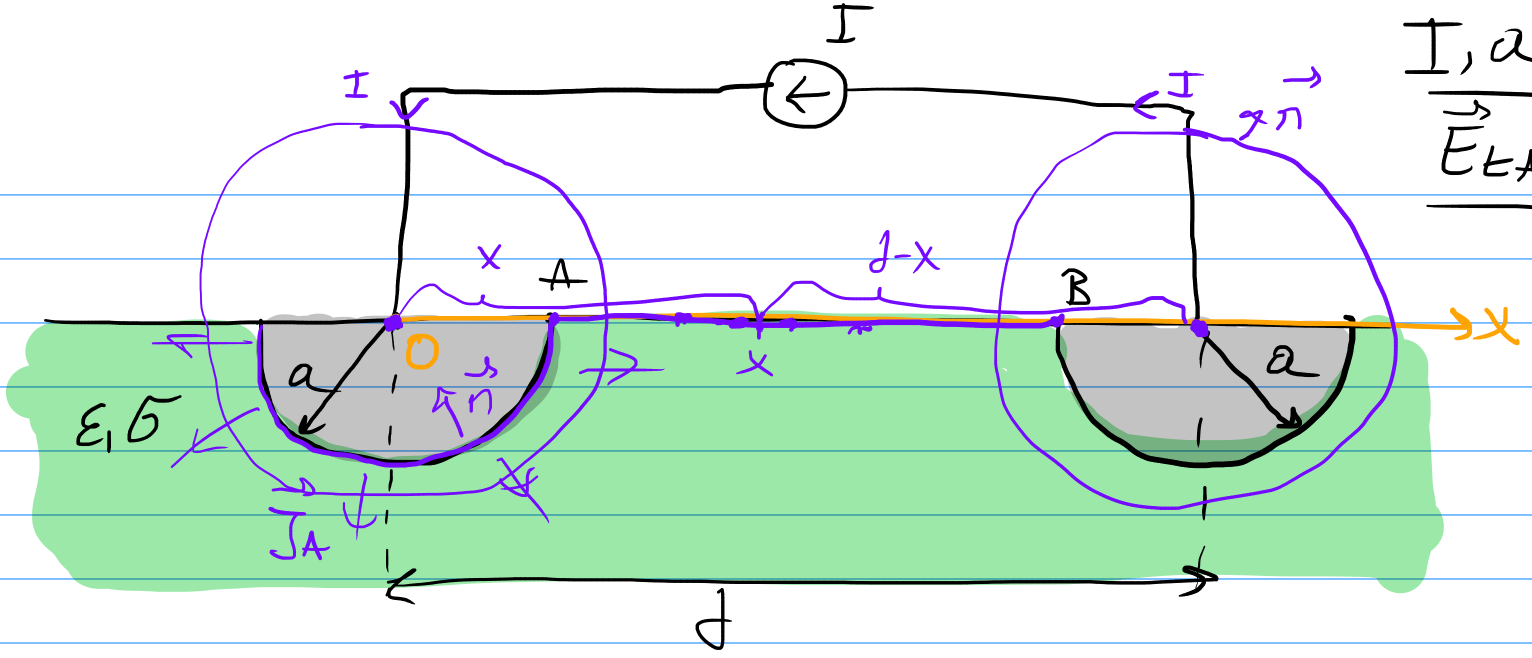
КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ,ОТ)

7. фебруар 2022.

1. Коло стационарне струје састоји се од идеалног струјног генератора јачине струје I, жичаног проводника занемарљиве отпорности и две полусферне електроде полупречника a и велике специфичне проводности, укопане у земљу на међусобном растојању d $(d >> a)$. Земљу чини хомогени несавршени диелектрик пермитивности ε и специфичне проводности σ. Одредити (а) тангенцијалну компоненту поља у тачкама дужи AB, (б) напон између електрода и (в) густине везаног наелектрисања на површи леве електроде.



(1)



$I, a, d \gg a, \varepsilon, \sigma,$

$\vec{E}_{tAB} = ?\ U_{AB} = ?,\ \rho_{PSA} = ?$

$\vec{J}_A = J_A(r_A)\,\vec{i}_{rA}$

$\vec{J}_B = J_B(r_B)\,\vec{i}_{rB}$

$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$

$\vec{J}_A = \dfrac{I}{2\pi r_A^2}\vec{i}_{rA}$ $\qquad \vec{J}_B = -\dfrac{I}{2\pi r_B^2}\vec{i}_{rB}$

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{\vec{J}_A}{\sigma} + \frac{\vec{J}_B}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r_A^2}\vec{i}_{rA} + \frac{-I}{2\pi\sigma r_B^2}\vec{i}_{rB}$$

$\underline{x \in (a, d-a)}$ $\qquad \vec{E} = \dfrac{I}{2\pi\sigma}\left(\dfrac{1}{x^2}\vec{i}_x - \dfrac{1}{(d-x)^2}(-\vec{i}_x)\right) = \boxed{\dfrac{I}{2\pi\sigma}\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(d-x)^2}\right)\vec{i}_x}$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{x=a}^{x=d-a} E(x)\,dx = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\int_a^{d-a}\frac{dx}{x^2} + \int_a^{d-a}\frac{dx}{(d-x)^2}\right)$$

$$U_{AB} = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\int_a^{d-a}\frac{dx}{x^2} + \int_{d-a}^{a}\frac{-dt}{t^2}\right) = \frac{I}{\pi\sigma}\int_a^{d-a}\frac{dx}{x^2} = \frac{I}{\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a}\right) = \boxed{\frac{I}{\pi\sigma a}}$$

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$

$\underline{r_A = a}$

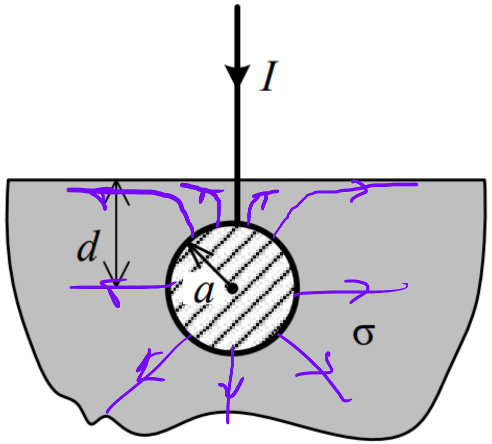
$$\vec{E} \approx \vec{E}_A \qquad \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_A = \frac{I(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\sigma r_A^2}\vec{i}_{rA}$$

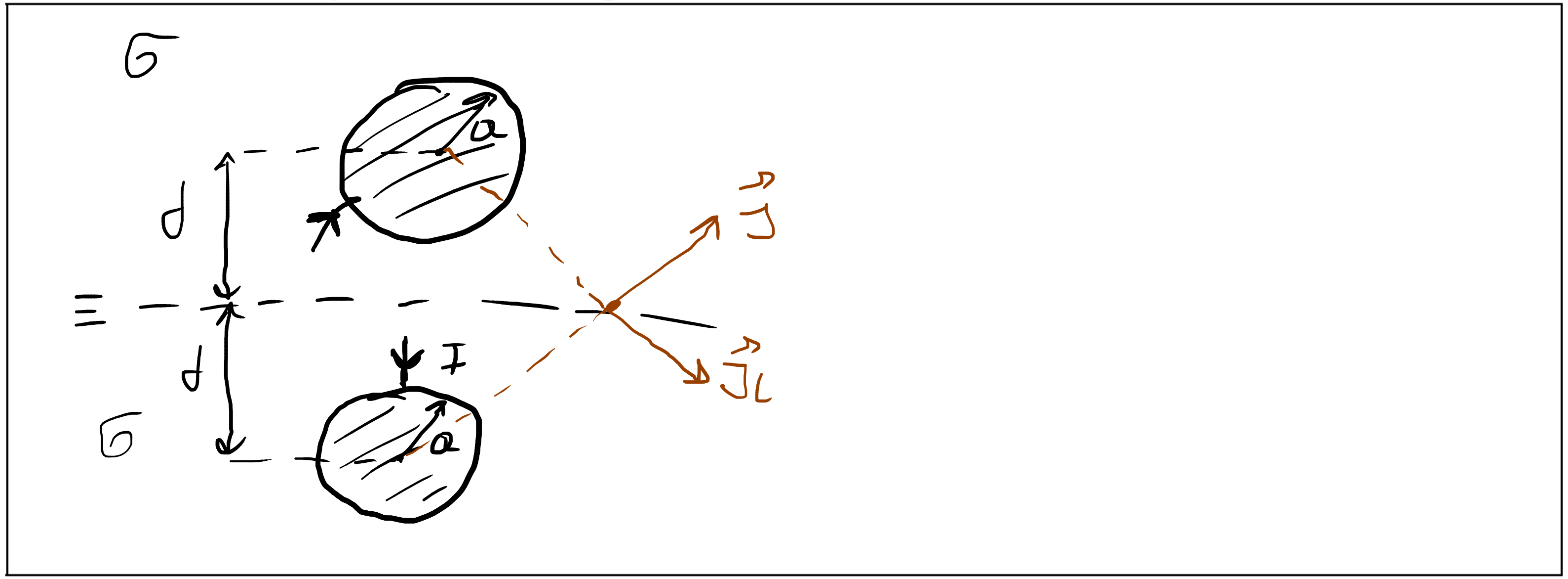
$$\rho_{sA} = \vec{n}\cdot\vec{P} = -\vec{i}_{rA}\cdot\vec{P} = \boxed{-\frac{I(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\sigma a^2}}$$

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ,ОГ)

27. јун 2022.

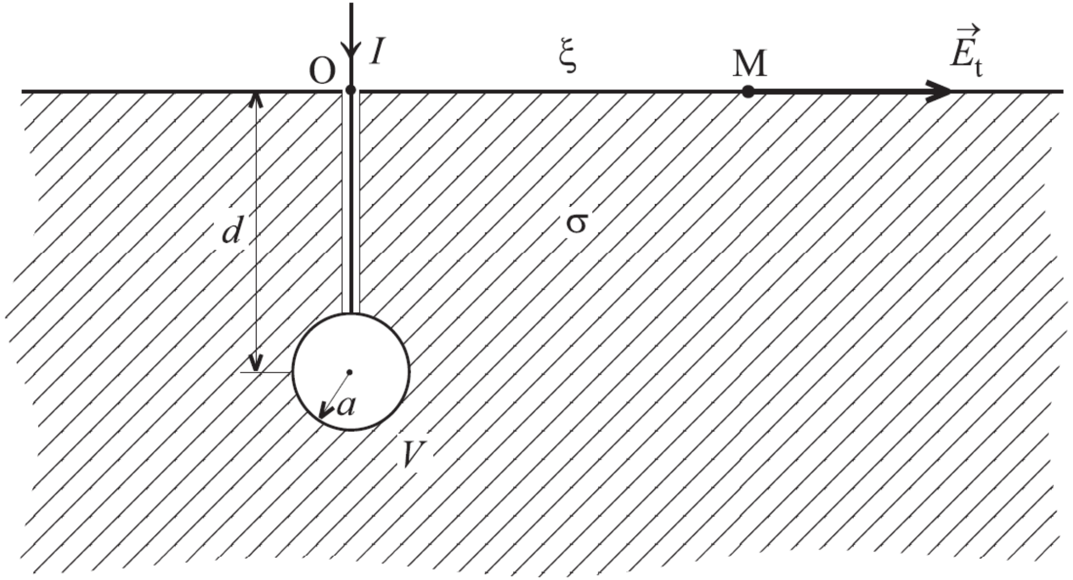
1. Илустровати теорему ликова у стационарном струјном пољу на примеру сферног уземљивача полупречника а, укопаног у хомогену земљу специфичне проводности σ, на дубини d од површи земље.





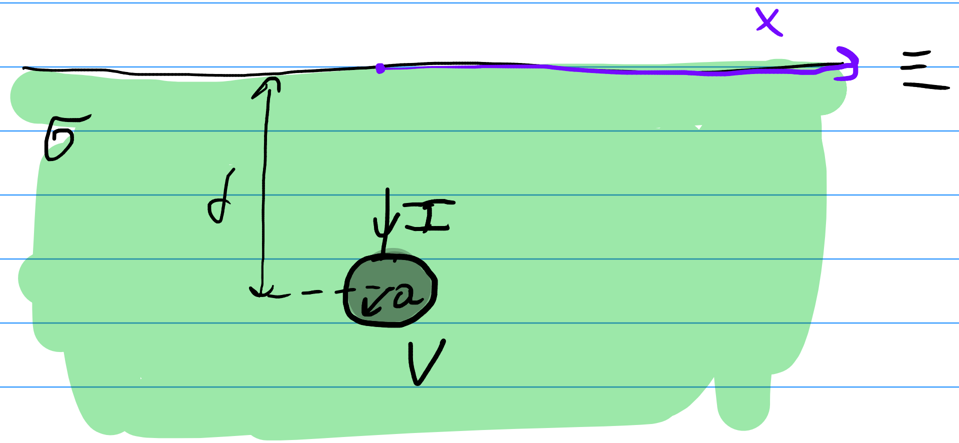
$J_{1n} = J_{2n} = 0$

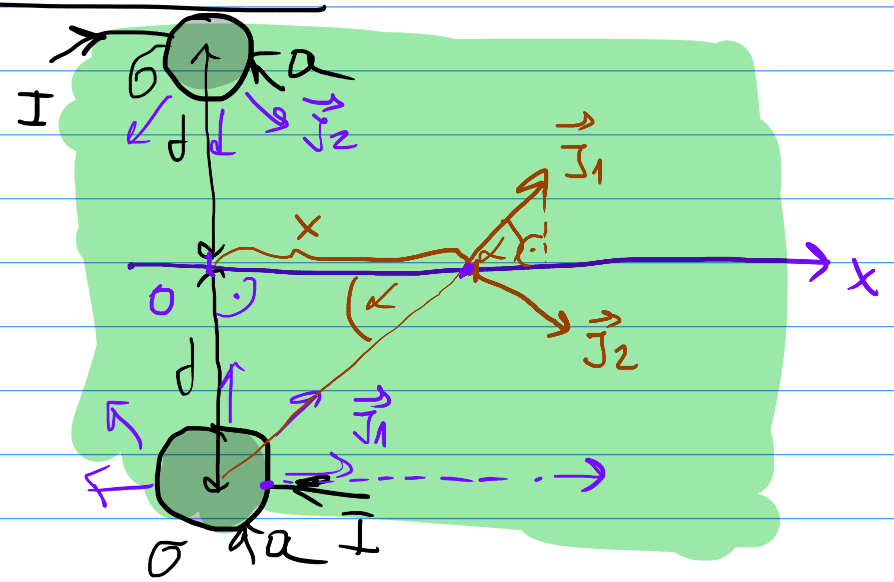
111. Sferni uzemljivač poluprečnika $a = 25$ cm ukopan je u homogenu zemlju specifične provodnosti $\sigma = 10^{-2}$ S/m tako da mu je centar na dubini $d = 5$ m. Specifična provodnost uzemljivača je mnogo veća od σ. Usled kratkog spoja na instalaciji, uzemljivač se nalazi na potencijalu $V = 10$ kV u odnosu na udaljene tačke. Odrediti maksimalan potencijal i maksimalnu tangencijalnu komponentu vektora jačine električnog polja na površi zemlje. (*Z820901*)



Slika 111.1.

(111) $a = 25\,cm$, $\sigma = 10^{-2}\frac{S}{m}$, $d = 5\,m$, $V = 10\,kV$, $E_{t\,max} = ?$, $V_{max} = ?$





$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \vec{J}_1 = \frac{I}{4\pi r_1^2}\vec{i}_{r_1} \qquad \vec{J}_2 = \frac{I}{4\pi r_2^2}\vec{i}_{r_2} \qquad \vec{E}_1 = \frac{\vec{J}_1}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r_1^2}\vec{i}_r$$

$$\vec{J}(x) = 2\cdot J_{1x}\vec{i}_x = 2\cdot\frac{I}{4\pi(x^2+d^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{Ix}{2\pi(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}_x$$

$$V = \int_{r=a}^{r\to\infty} E_1 \, dr = \frac{I}{4\pi\sigma a} \qquad I = V 4\pi\sigma a = \boxed{314{,}16 A}$$

$$\vec{E}(x) = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I x}{2\pi\sigma (x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_x$$

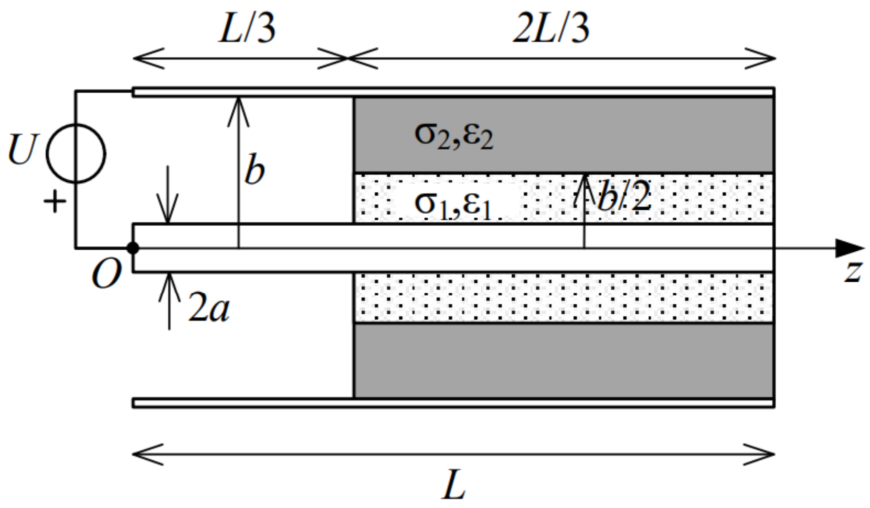
$$\frac{d|\vec{E}|}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm \frac{d}{\sqrt{2}}}$$

$$V(x) = \int_{x}^{+\infty} E(x)\, dx = \frac{I}{2\pi\sigma\sqrt{x^2+d^2}} \qquad V_{max} = V(x=0) = \frac{I}{2\pi\sigma d} = \boxed{1000 V}$$

КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

17. јануар 2022.

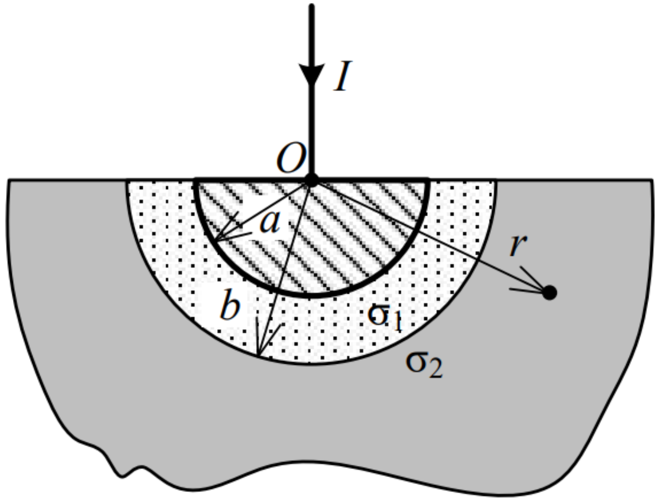
1. На улаз правог коаксијалног вода дужине L, унутрашњег полупречника a и спољашњег полупречника b, прикључен је генератор временски константног напона U. Унутрашњост вода делимично је испуњена са два концентрична хомогена несавршена диелектрична слоја, пермитивности и специфичних проводности ε_1, σ_1 и ε_2, σ_2, респективно, као на слици. Занемарујући ивичне ефекте, одредити изразе за (а) проводност вода, (б) расподелу струје у унутрашњем проводнику $I(z)$ и нацртати њен график за $0 \le z \le L$. (в) Одредити израз за расподелу површинског слободног наелектрисања на раздвојној површи два диелектрична слоја.



КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

27. јануар 2023.

1. Полусферни уземљивач полупречника a, укопан је у нехомогену земљу, као на слици. Специфична проводност слоја земље уз уземљивач је σ_1, а остатка земље је σ_2. Пермитивност у оба слоја земље износи ε. У уземљивач утиче стационарна струја јачине I. Специфична проводност уземљивача је много већа од σ_1 и σ_2. Одредити изразе за (а) отпорност уземљивача, (б) расподелу слободних наелектрисања у земљи и (в) електрични скалар-потенцијал на површи земље за $r > b$.



КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

18. јануар 2017.

2. Сферни уземљивач, полупречника a укопан је у хомогену земљу специфичне проводности σ, тако да му је центар на дубини $d >> a$, као на слици. Специфична проводност уземљивача је много већа од σ. Услед кратког споја на инсталацији, уземљивач се налази на високом потенцијалу у односу на удаљене тачке. (а) Одредити полупречник уземљивача, $a = a_0$, тако да при потенцијалу уземљивача V_{f}, максимална тангенцијална компонента вектора јачине електричног поља на површи земље буде $E_{\mathrm{t,max}} = E_0$. (б) Одредити максимални потенцијал на површи земље (у односу на удаљене тачке) за полупречник добијен у тачки под (а).