

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

25. август 2021.

1. Написати потпуни систем диференцијалних једначина, у комплексном домену, за квазистационарно електромагнетско поље у изотропној линеарној хомогеној средини пермитивности ϵ , пермеабилности μ и специфичне проводности σ , у чијој је свакој тачки познат вектор јачине побудног електричног поља, $\underline{E}_i$.

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$$

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E} + \vec{E}_i)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i)$$

$$\text{rot } \underline{E} = -j\omega \underline{H}$$

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{J}$$

$$\text{div } \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\text{div } \underline{H} = 0$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ) 13E072TEM, jun II 2023.

2. Написати потпуни систем диференцијалних једначина, у временском домену, за квазистационарно електромагнетско поље у изотропној линеарној хомогеној средини пермитивности ϵ , пермеабилности μ и специфичне проводности σ , у чијој је свакој тачки познат вектор густине побудних струја, $\vec{J}_i$.

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_i$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_i$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\text{div} \vec{H} = 0$$

183. U svakoj tački domena v poznati su električni skalar-potencijal, V , i magnetski vektor-potencijal, $\mathbf{A}$, kvazistacionarnog elektromagnetskog polja. Odrediti izraze za vektore jačine električnog polja usled viška naelektrisanja i indukovano električnog polja, kao i za vektor magnetske indukcije, u domenu v . (P970605)

$$\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_{ind}$$

$$\vec{E}_Q = -\text{grad} V$$

$$\vec{E}_{ind} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

184. Napisati izraze za električni skalar-potencijal i magnetski vektor-potencijal usled prostoperiodičnih zapreminskih naelektrisanja i struja niske učestanosti u vakuumu. (P830201)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{R}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} dV}{R}$$

$$\underline{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\underline{\rho} dV}{R} \quad \underline{\vec{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\underline{\vec{J}} dV}{R}$$

185. U domenu v , u vakuumu, postoje struje, gustine $\mathbf{J}$, i naelektrisanja, gustine ρ . Polje ovih izvora se može smatrati kvazistacionarnim. Pod pretpostavkom da nema drugih izvora polja, odrediti izraze za vektore jačine električnog polja usled viška naelektrisanja, indukovano električnog polja i magnetskog polja. (P970427)

$$\vec{E}_Q = -\int_V \rho dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV \vec{r}_R}{R^2}$$

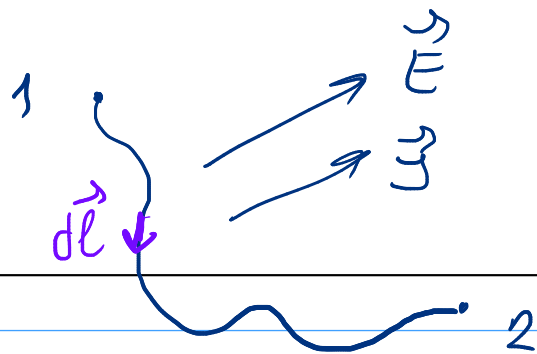
$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{J} dV) \times \vec{r}_R}{R^2} \quad \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{J} dV) \times \vec{r}_R}{R^2}$$

$$\vec{E}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} dV}{R}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

1. септембар 2023.

2. У свакој тачки простора познат је вектор јачине квазистационарног електричног поља $\vec{E}$, услед запреминских струја и наелектрисања у домену v . Густина струја је $\vec{J}$, а средина је вакуум. Одредити израз за разлику електричних скалар-потенцијала две произвољне тачке простора.



$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}_Q \cdot d\vec{l}$$

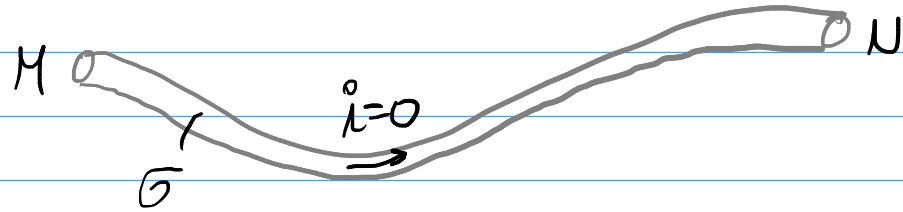
$$\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_{ind} \quad \vec{E}_Q = \vec{E} - \vec{E}_{ind}$$

$$\vec{E}_{ind} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} dV}{R}$$

$$\vec{E}_Q = \vec{E} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} dV}{R}$$

$$U_{12} = \int_1^2 \left(\vec{E} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} dV}{R} \right) \cdot d\vec{l}$$

187. Kolika je razlika električnih skalar-potencijala krajeva (M i N) žice specifične provodnosti σ , koja se nalazi u kvazistacionarnom polju, ako je u svakoj tački prostora poznat magnetski vektor-potencijal, $\mathbf{A}$, i u žici nema struje? (P940901)



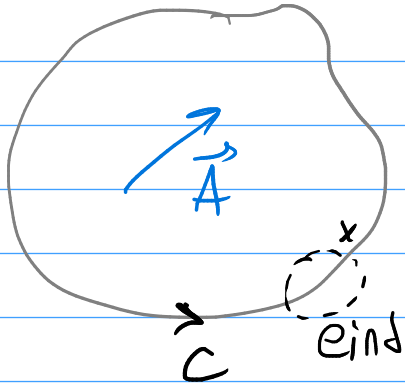
$$i=0 \Rightarrow \vec{J}=0$$

$$\vec{J}=\sigma \vec{E}=0 \Rightarrow \vec{E}=0$$

$$\vec{E}_Q + \vec{E}_{ind} = 0 \quad \vec{E}_Q = -\vec{E}_{ind}$$

$$U_{MN} = \int_M^N \vec{E}_Q \cdot d\vec{l} = \int_M^N (-\vec{E}_{ind}) \cdot d\vec{l} = \boxed{\int_M^N \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l}}$$

188. Napisati izraz za indukovanu elektromotornu silu u konturi C , ako je u svakoj tački prostora poznat magnetski-vektor potencijal, $\mathbf{A}$. (P910620)



$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_C \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\ell}$$

$$\mathcal{E}_{ind} = - \oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

27. јануара 2023.

1. (а) Написати потпун систем диференцијалних једначина за квазистационарно електромагнетско поље у хомогеној линеарној средини, ако је у свакој тачки средине познат вектор јачине побудног поља $\vec{E}_i$. (б) Ако је поље простопериодично, учестаности f , под којим условима се оно може сматрати споропроменљивим? Образложити одговор.

(а)

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i)\end{aligned}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\text{div } \vec{H} = 0 \quad (\text{div } \vec{B} = 0)$$

(б)

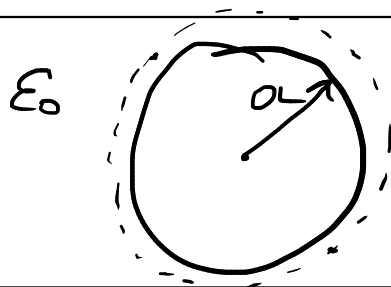
$$f\sqrt{\epsilon\mu} D \ll 1 \quad (\omega\sqrt{\epsilon\mu} D \ll 1)$$
$$\omega = 2\pi f$$

D — максималан пречник линеара
у коме посматрамо поље

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

28. јун 2021.

1. Да ли се електромагнетско поље, које ствара простопериодична струја учестаности $f = 2,4 \text{ GHz}$, може сматрати споропроменљивим у непосредној околини сферног проводника полупречника $a = 12,5 \text{ cm}$? Средина око проводника је ваздух. Образложити одговор.



$$f \sqrt{\epsilon \mu} D \ll 1$$

$$f \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} 2a \approx 2 \not\ll 1$$

Не може

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

8. фебруар 2021.

1. Написати изразе за ротор и дивергенцију вектора јачине индукованог електричног поља у линеарној хомогеној средини, у чијој свакој тачки је познат вектор јачине квазистационарног магнетског поља $\vec{H}$.

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{div} \vec{D} = \rho \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_{\text{ind}}$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = \cancel{\text{rot} \vec{E}_a} + \text{rot} \vec{E}_{\text{ind}}$$

$$\text{rot} \vec{E}_{\text{ind}} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{E}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{A} = \vec{B} \quad \text{div} \vec{A} = 0$$

$$\text{div} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\text{div} \vec{E}_{\text{ind}} = 0$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

26. јун 2023.

1. (a) Написати изразе за дивергенцију и ротор магнетског вектор-потенцијала у споропроменљивом електромагнетском пољу. (б) Полазећи од потпуног система диференцијалних једначина за споропроменљиво електромагнетско поље у хомогеној линеарној средини и изрази добијених под (a), извести диференцијалну једначину коју задовољава магнетски вектор-потенцијал.

(a)

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{A} &= \vec{B} \\ \text{div } \vec{A} &= 0\end{aligned}$$

(b)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \mu \vec{J}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = (\nabla \cdot \vec{A}) \nabla - (\nabla \cdot \nabla) \vec{A}$$

$$\cancel{\nabla \nabla \cdot (\text{div } \vec{A})} - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J}$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

11. јануар 2024.

1. (а) Написати потпун систем диференцијалних једначина за квазистационарно електромагнетско поље у нехомогеној нелинеарној средини у којој постоје побудне струје. (б) Полазећи од једначина добијених под (а), извести одговарајућу једначину континуитета за дату средину.

(а)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_i$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$$

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E})$$

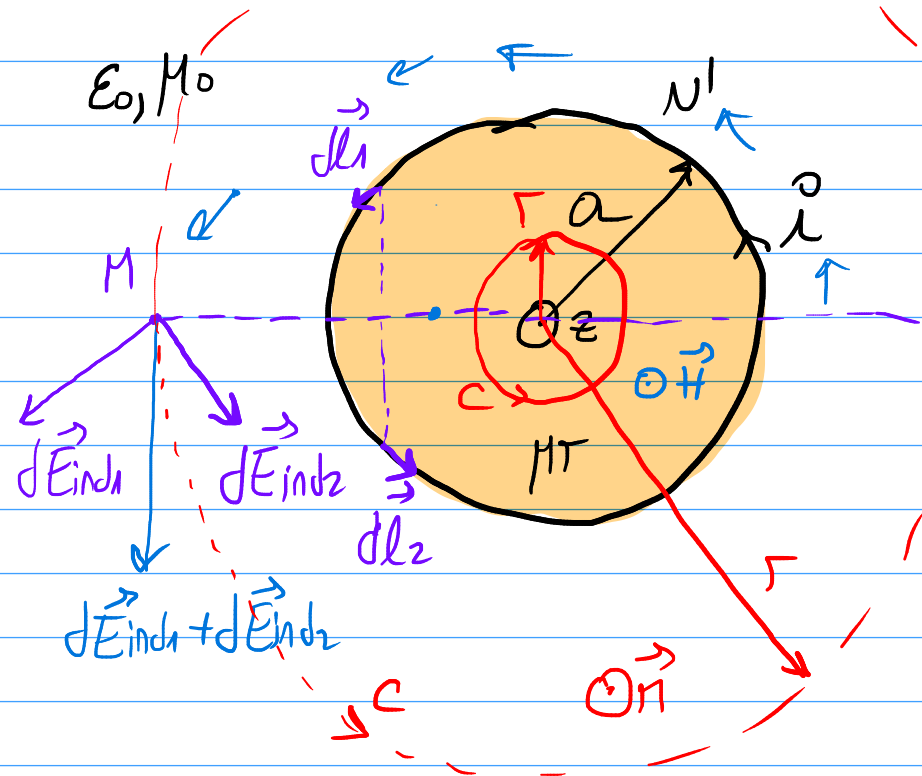
(б)

$$\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = 0$$

$$\text{div}(\vec{J} + \vec{J}_i) = 0$$

189. Veoma dugačak solenoid kružnog poprečnog preseka, poluprečnika a i podužne gustine zavojaka N' , ispunjen je linearnim feromagnetskim materijalom, relativne permeabilnosti μ_r . U namotaju solenoida postoji sporo promenljiva struja jačine i . Okolna sredina je vazduh. Zanemarujući magnetsko polje struja indukovanih u jezgru solenoida, dokazati da su linije vektora jačine indukovanog električnog polja u solenoidu i izvan njega krugovi sa centrima na osi solenoida i odrediti intenzitet toga vektora. (Z900915)

(189) $a, \nu', \mu r, \hat{i}, \vec{E}_{ind} = ?$



$$\vec{E}_{ind} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{\frac{\partial \vec{i}}{\partial t} d\vec{\ell}}{R}$$

$$d\vec{E}_{ind} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\frac{\partial \vec{i}}{\partial t} d\vec{\ell}}{R}$$

$$\vec{E}_{ind} = E_{ind}(r) \cdot \hat{r}_e$$

$$E_{ind} = \oint_C \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$E_{ind} \cdot 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\vec{H} = \begin{cases} \nu' \hat{r}_e, r < a \\ 0, r > a \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \mu r \nu' \hat{r}_e, r < a \\ 0, r > a \end{cases}$$

$r \leq a$ $E_{ind} \cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt} (\mu_0 \mu r \nu' \hat{r}_e r^2 \pi)$

$$E_{ind} = -\frac{\mu_0 \mu r \nu' r^2 \pi \frac{d\hat{r}_e}{dt}}{2\pi r}$$

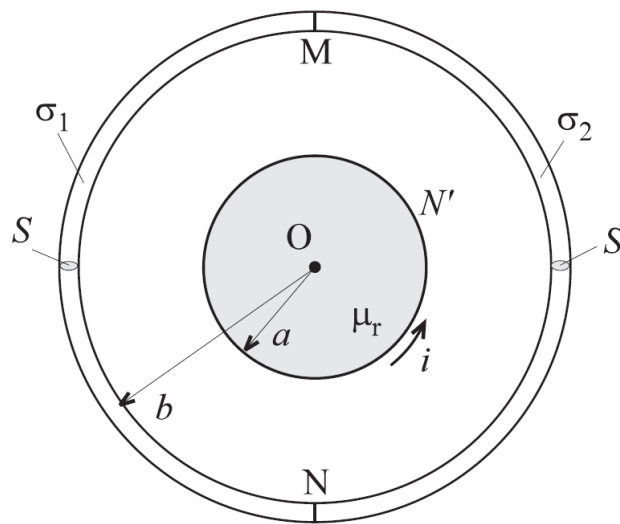
$$E_{ind} = - \frac{\mu_0 \mu_r N' \Gamma}{2} \frac{di}{dt}$$

$\Gamma > a$ $E_{ind} \cdot 2\pi\Gamma = - \frac{d}{dt} (\mu_0 \mu_r N' i a^2 \pi) = - \mu_0 \mu_r N' a^2 \pi \frac{di}{dt}$

$$E_{ind} = - \frac{\mu_0 \mu_r N' a^2}{2\Gamma} \frac{di}{dt}$$

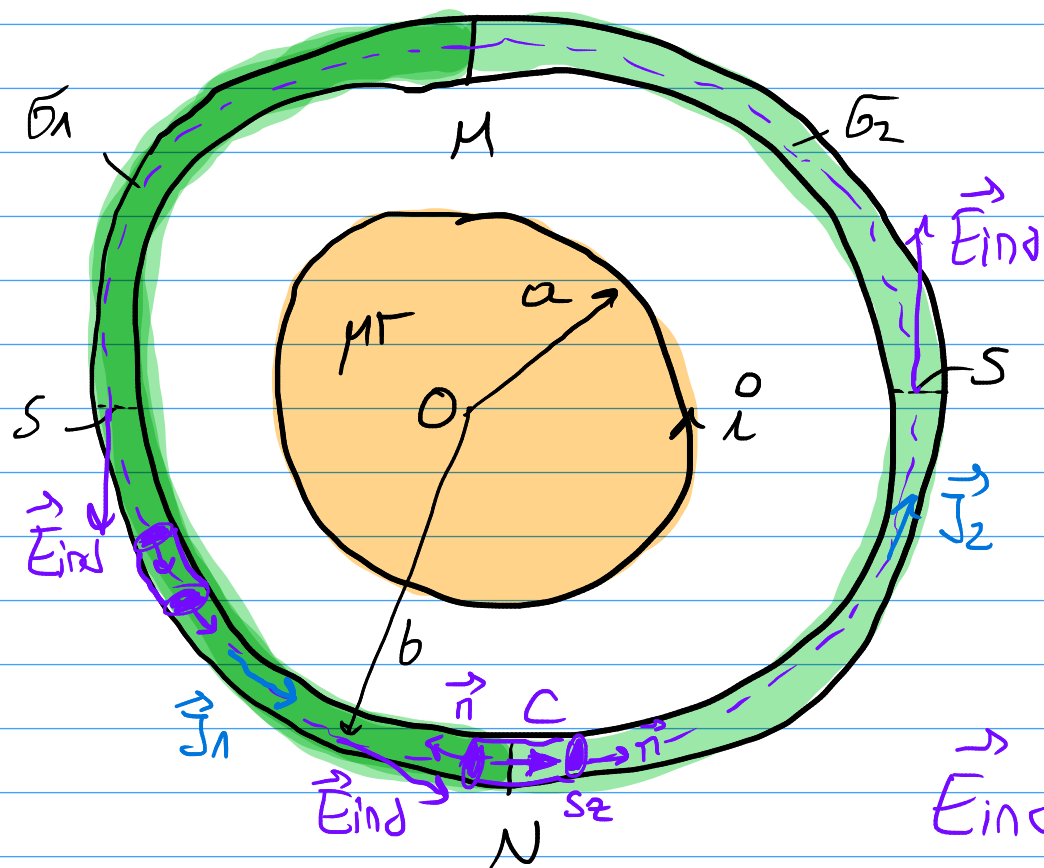
$$\vec{E}_{ind} = \begin{cases} - \frac{\mu_0 \mu_r N' \Gamma}{2} \frac{di}{dt} \vec{e}_\varphi, & \Gamma \leq a \\ - \frac{\mu_0 \mu_r N' a^2}{2\Gamma} \frac{di}{dt} \vec{e}_\varphi, & \Gamma > a \end{cases}$$

192. Poprečni presek veoma dugačkog solenoida je krug, poluprečnika a , a jezgro je načinjeno od feromagnetskog materijala, relativne permeabilnosti μ_r (slika 192.1). Okolna sredina je vakuum. Zavojci su namotani ravnomerno i gusto, a njihova podužna gustina je N' . U zavojcima postoji sporo promenljiva prostoperiodična struja, jačine $i = I\sqrt{2}\cos\omega t$. Solenoid je obuhvaćen koaksijalnim kružnim zavojkom poluprečnika b ($b > a$), čije su polovine različitih specifičnih provodnosti, σ_1 i σ_2 . Magnetsko polje struja indukovanih u zavojku i jezgru se može zanemariti. Odrediti izraz za razliku električnih skalar-potencijala tačaka M i N. (Z890407)



Slika 192.1.

(192) $a, \mu_r, N', \dot{I} = I\sqrt{2}\cos\omega t, b, \sigma_1, \sigma_2, V_M - V_N = ?$



$$\vec{E}_{ind} = E_{ind}(r) \vec{r}_e$$

$$E_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$E_{ind} \cdot 2\pi b = - \frac{d}{dt} (\mu_r \mu_0 N' \dot{I} a^2 \pi)$$

$$E_{ind} = - \frac{\mu_r \mu_0 N' a^2}{2b} \frac{d\dot{I}}{dt}$$

$$E_{ind} = - \frac{\mu_r \mu_0 N' a^2}{2b} (-\omega \sin\omega t I\sqrt{2})$$

$$\vec{E}_{ind} = \frac{\mu_r \mu_0 N' a^2 I\sqrt{2}\omega}{2b} \sin\omega t \vec{r}_e$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma (\vec{E}_Q + \vec{E}_{ind}), \quad \vec{J} = J \vec{r}_e, \quad \vec{E}_Q = E_Q \vec{r}_e$$

$$\vec{E}_Q = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}_{ind}$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$J_1 \cancel{\delta} = J_2 \cancel{\delta}$$

$$\vec{E}_{Q1} = \frac{\vec{J}}{\sigma_1} - \vec{E}_{ind}$$

$$\vec{E}_{Q2} = \frac{\vec{J}}{\sigma_2} - \vec{E}_{ind}$$

$$\oint_C \vec{E}_Q \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\left(\frac{J}{\sigma_1} - E_{ind} \right) \cancel{b\pi} + \left(\frac{J}{\sigma_2} - E_{ind} \right) \cancel{b\pi} = 0$$

$$J \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) = 2 E_{ind}$$

$$J \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} = 2 E_{ind}$$

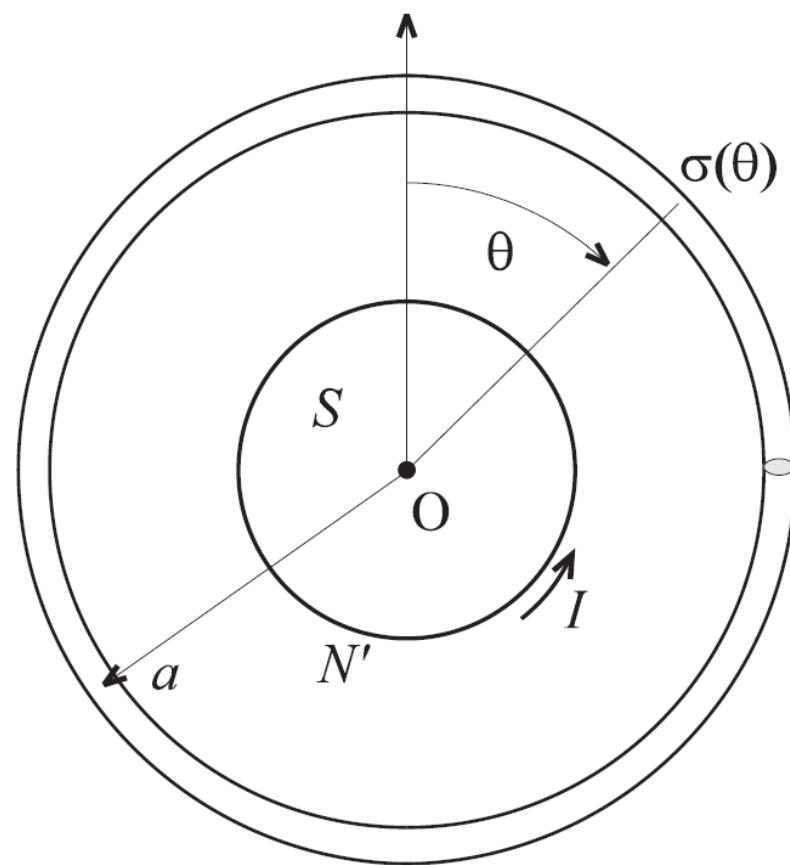
$$J = \frac{2 \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} E_{ind}$$

$$E_{Q1} = \frac{J}{\sigma_1} - E_{ind} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} E_{ind}$$

$$V_M - V_N = \int_M^N \vec{E}_Q \cdot d\vec{l} = b \hat{r} \cdot E_{Q1} =$$

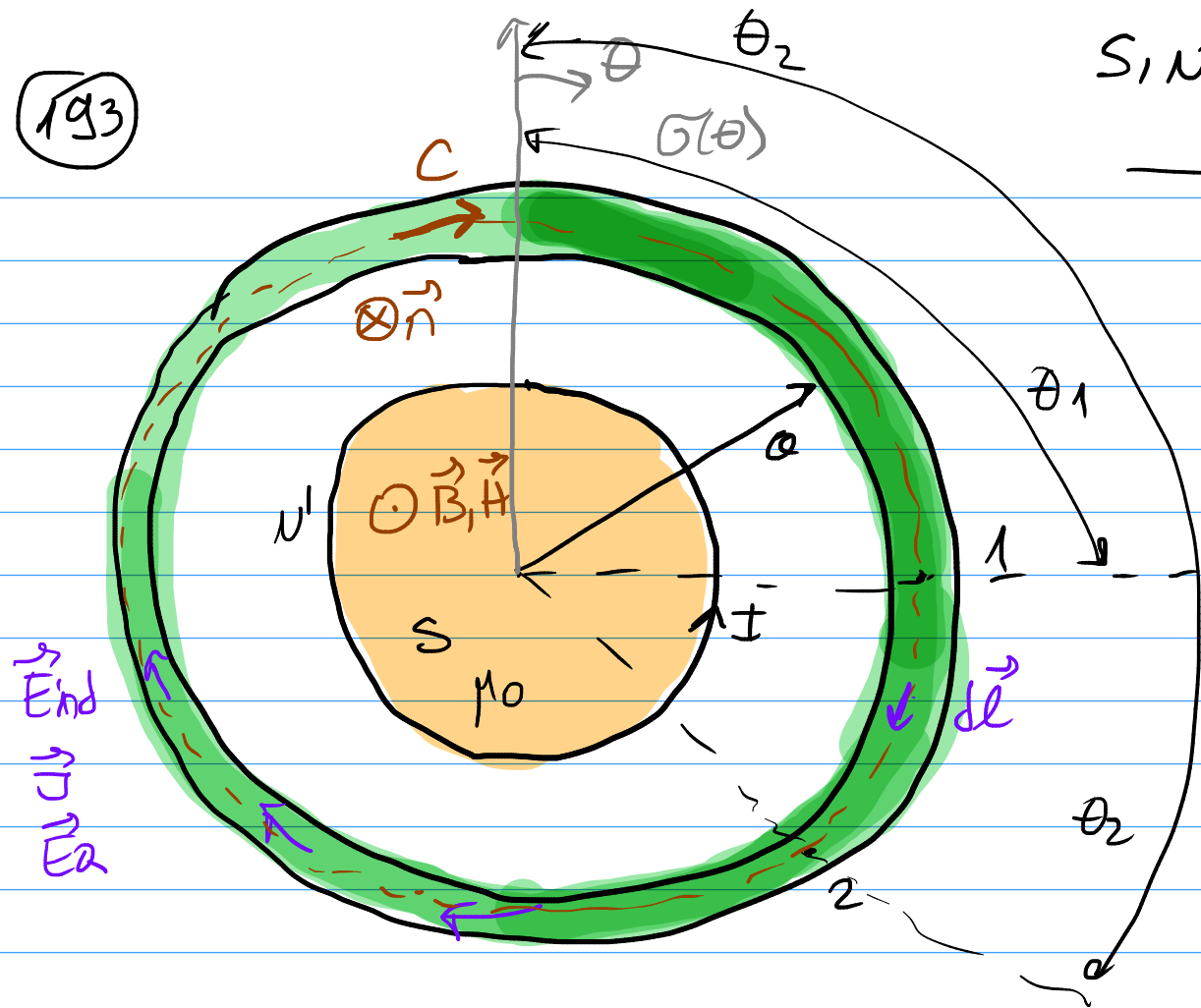
$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{\mu_0 \omega \sqrt{2} \omega \pi a^2}{2} \sin \omega t$$

193. Veoma dugačak solenoid, površine poprečnog preseka S i podužne gustine zavoja N' , nalazi se u vakuumu. U zavojcima solenoida postoji sporo promenljiva prostoperiodična struja, ugaone učestanosti ω i efektivne vrednosti I . Oko solenoida je postavljena kružna žičana kontura, poluprečnika a i specifične provodnosti $\sigma = \sigma_0/[1/\pi + \sin(\theta/2)]$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), gde je σ_0 konstanta (slika 193). Zanemarujući elektromotornu silu samoindukcije, odrediti (a) gustinu struje u žičanoj konturi i (b) razliku električnih skalar-potencijala dve proizvoljne tačke duž konture. (Z960331)



Slika 193.

193



$$S, N', \omega, I, a, b = \frac{\sigma_0}{\frac{1}{\sigma_0} + \sin \frac{\theta}{2}}, \quad \vec{J} = ?, \quad V_1 - V_2 = ?$$

$$e_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad e_{ind} = - \mu \omega \Phi$$

$$E_{ind} \cdot 2\pi a = + \mu \omega (+S \cdot \mu_0 N' I)$$

$$\vec{E}_{ind} = \frac{\mu \omega S \mu_0 N' I}{2\pi a} \hat{r}_\theta$$

$$\psi = 0 \quad I = I$$

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{J} = J \hat{r}_\theta$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E}_a + \vec{E}_{ind}) \quad \vec{E}_a = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}_{ind}$$

$$\oint \vec{E}_a \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} E_a a d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} a \left(\frac{\underline{J}}{\underline{\sigma}_0} \left(\frac{1}{\pi} + \sin \frac{\theta}{2} \right) - \underline{E}_{ind} \right) d\theta = 0$$

$$\frac{\underline{J}}{\underline{\sigma}_0} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right) - \underline{E}_{ind} a \int_0^{2\pi} d\theta = 0$$

$$\frac{\underline{J}}{\underline{\sigma}_0} \left(\frac{1}{\pi} \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} \sin t \cdot 2 dt \right) - \underline{E}_{ind} a \cdot 2\pi = 0$$

$$\frac{\underline{J}}{\underline{\sigma}_0} (2 + 4) = 2\pi \underline{E}_{ind}$$

$$\underline{J} = \frac{\pi \underline{\sigma}_0}{3} \underline{E}_{ind}$$

$$\underline{J} = \frac{\mu_0 \sigma_0 \omega N' I}{6a} \hat{z}$$

$$\underline{E}_2 = \frac{\underline{J}}{\underline{\sigma}_0} - \underline{E}_{ind} = \underline{E}_{ind} \left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{3} \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\mu_0 \sigma_0 \omega N' I}{6\pi a} \left(-2 + \pi \sin \frac{\theta}{2} \right) \hat{z}$$

$$\underline{V_1} - \underline{V_2} = \int_1^2 \underline{\vec{E}}_Q \cdot d\underline{\vec{r}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} E_Q a d\theta$$

$$\underline{V_1} - \underline{V_2} = \frac{\mu_0 S \mu_0 N^2 I}{3} \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} + \cos \frac{\theta_1}{2} - \cos \frac{\theta_2}{2} \right)$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

17. септембар 2024.

2. У намотају веома дугачког ваздушног соленоида кружног попречног пресека, полупречника a и подужне густине навојака N' , постоји споропроменљива струја јачине $i(t)$. Околна средина је ваздух. Извести вектор јачине индукованог електричног поља (а) унутар и (б) изван соленоида.

(а)

(б)

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

26. август 2024.

1. (а) Написати Фарадејев закон електромагнетске индукције за споропроменљиво електромагнетско поље у диференцијалном облику. (б) Полазећи од израза добијеног под (а) и Стоксове теореме, извести Фарадејев закон у интегралном облику.

(а)

(б)