ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

22. августа 2022.

1. По запремини хомогене проводне сфере, полупречника a и специфичне проводности σ постоји квазистационарно периодично електрично поље чији је вектор јачине $\mathbf{E}(t)$. Одредити изразе за (а) тренутну запреминску густину снаге Џулових губитака сфере и (б) укупну средњу снагу Џулових губитака сфере.

(а)	(б)
$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	

$$p_J = \vec{J} \cdot \vec{E} = \boxed{\sigma |\vec{E}|^2}$$

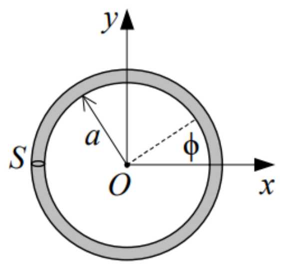
$$P_J = \int_v p_J \, dv = v \cdot p_J = \frac{4}{3} a^3 \pi \sigma |\vec{E}|^2$$

$$P_{Jsr} = \frac{1}{T} \int_0^T P_J \, dt = \frac{4}{3} a^3 \pi \sigma \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{E}|^2 dt = \boxed{\frac{4}{3} a^3 \pi \sigma \overline{|\vec{E}|^2}}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

26. јун 2023.

2 Танак кружни завојак, полупречника a и површине попречног пресека S ($S << a^2$), направљен од хомогеног материјала специфичне проводности σ, налази се у вакууму, у простопериодичном споро променљивом електромагнетском пољу. У свакој тачки простора познат је магнетски вектор-потенцијал, дат изразом у цилиндричном координатном систему $\mathbf{A}(t) = -\sqrt{2} A_0 \sin \omega t \, \mathbf{i}_\phi$, где су A_0 и ω константе. Одредити у завојку (а) комплексни вектор јачине електричног поља и (б) средњу снагу Џулових губитака. Занемарити магнетско поље услед струја у завојку.



(а)

$$\vec{E} = \vec{E}_{ind} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \sqrt{2} A_0 \, \omega \cdot \cos \omega t \, \vec{i}_\varphi$$

(б)

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = A_0 \omega \, \vec{i}_\varphi}$$

$$p_J = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma |\vec{E}|^2 = \sigma \, 2 A_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t$$

$$P_J = \int_v p_J \, dv = p_J \cdot 2 a \pi \cdot S = \sigma 4\pi S a A_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t$$

$$P_{Jsr} = \frac{1}{T} \int_0^T P_J \, dt = \frac{\sigma 4\pi S a A_0^2 \omega^2}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt = \frac{\sigma 4\pi S a A_0^2 \omega^2}{T} \cdot \frac{T}{2}$$

$$\boxed{P_{JST} = 2\pi\sigma\, S\, a\, A_0^2\, \omega^2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t \, dt$$

$$f(t) = 1 \cdot \cos \omega t$$

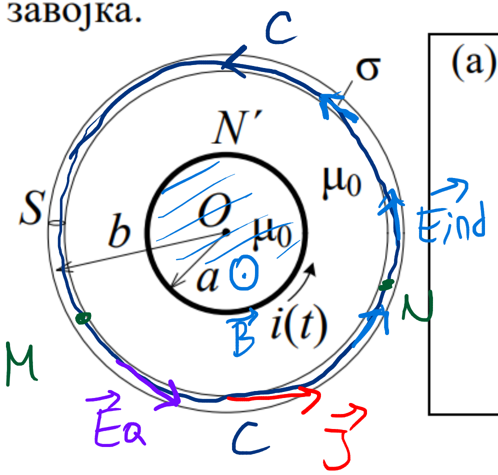
$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t \, dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

27. јануара 2023.

2. У намотају веома дугачког соленоида, кружног попречног пресека, полупречника a и густине намотаја N', постоји споро промењљива струја јачине i. Околна средина је ваздух. Око соленоида, коаксијално са њим, постављен је танак хомоген кружни завојак специфичне проводности σ, полупречника $b > a$ и површине попречног пресека S. Завојак је копланаран са попречним пресеком соленоида. Занемарујући магнетско поље струје завојка, одредити (а) густину тренутне снаге Џулових губитака у завојку и (б) разлику електричних скалар-потенцијала две произвољне тачке дуж завојка.



(а)	(б)
$\oint_C \vec{E}_{ind}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ $E_{ind}\cdot 2\cancel{\pi} b = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 N' i a^2 \cancel{\pi}\right)$ $E_{ind} = -\frac{\mu_0 N' a^2}{2b}\frac{di}{dt}$	

$$J = \sigma E = \sigma (E_Q + E_{ind}) \qquad E_Q = \frac{J}{\sigma} - E_{ind} \qquad \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{J}_{(r=b)} = J \cdot \vec{i}_\varphi$$

$$J = const.$$

$$E_Q = const. \qquad \oint_C \vec{E}_Q \cdot d\vec{l} = 0 \qquad E_Q \cdot 2\pi b = 0 \Rightarrow E_Q = 0$$

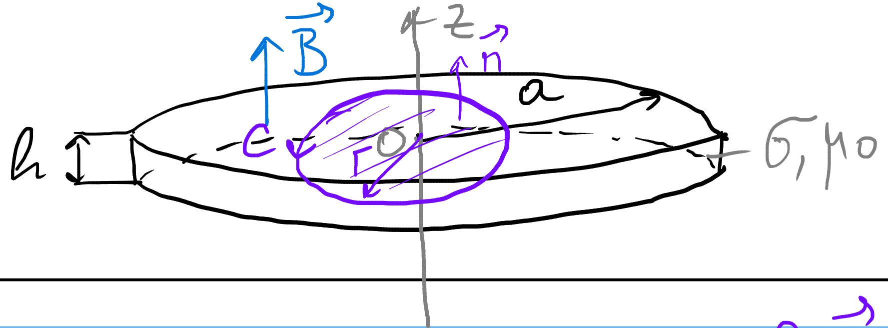
$$J = \sigma E_{ind} \qquad P_J = \sigma |\vec{E}_{ind}|^2$$

$$\boxed{P_J = \sigma \frac{\mu_0^2 N'^2 a^4}{4b^2} \left(\frac{di}{dt}\right)^2} \qquad \boxed{V_M - V_N = 0} \quad (E_Q = 0)$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

11. јануар 2024.

2. Одредити средњу снагу Џулових губитака у проводном кружном диску, полупречника $a = 8\ \text{cm}$, висине $h = 5\ \text{mm}$, специфичне проводности $\sigma = 2\cdot 10^6\ \text{S/m}$ и пермеабилности μ_0, који се налази у хомогеном споропроменљивом простопериодичном магнетском пољу учестаности $f = 24\ \text{kHz}$ и ефективне вредности магнетске индукције $B = 6\ \mu\text{T}$. Вектор магнетске индукције паралелан је оси диска. Занемарити магнетско поље струја индукованих у диску.



$\vec{B}(t) = B\sqrt{2}\cos\omega t\ \vec{i}_z$ $\qquad \vec{B} = \underline{B}\ \vec{i}_z$

$\omega = 2\pi f$ $\qquad \underline{B} = B$

$\vec{E}_{ind} = E_{ind}(r)\,\vec{i}_\varphi$ $\qquad \oint_C \vec{E}_{ind}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ $\qquad E_{ind}\cdot 2\cancel{\pi}\cancel{r} = B\sqrt{2}\,\omega\sin\omega t\ r^{\cancel{2}}\cancel{\pi}$

$E_{ind} = \frac{B\sqrt{2}\omega r}{2}\sin\omega t$ $\qquad \vec{J} = \sigma\vec{E} = \sigma\vec{E}_{ind}$ $\qquad p_J = \vec{J}\cdot\vec{E} = \sigma E_{ind}^2$

$p_J = \sigma\frac{B^2}{2}\omega^2 r^2\sin^2\omega t$

$$P_{JSr} = \frac{1}{T}\int_0^T P_J \, dt = \sigma \frac{B^2}{2} \omega^2 r^2 \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega t}_{1/2} = \sigma \frac{B^2}{4} \omega^2 r^2$$

$$P_{JSr} = \sigma \frac{B^2}{\cancel{4}} \cancel{4}\pi^2 f^2 r^2 = \sigma B^2 \pi^2 f^2 r^2$$

$$P_{JSr} = \int_v P_{JSr} \, dv = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{h} \int_{r=0}^{a} \sigma B^2 \pi^2 f^2 r^2 \, r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$P_{JSr} = \sigma B^2 \pi^2 f^2 \, 2\pi \, h \int_{r=0}^{a} r^3 dr = \sigma \pi^2 B^2 f^2 \, 2\pi h \frac{a^4}{4}$$

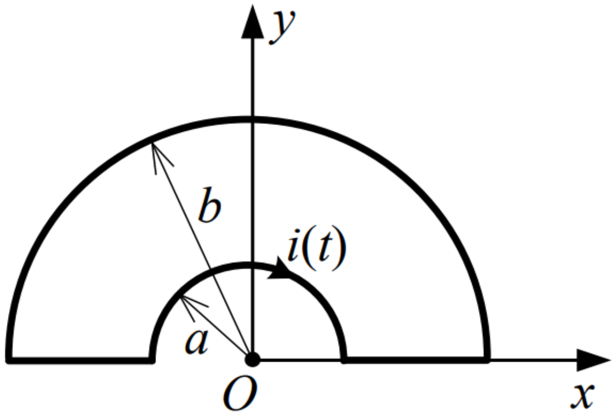
$$P_{JSr} = \frac{\sigma \pi^3 B^2 f^2 a^4}{2} h = 131{,}7 \, mW$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

27. јануара 2023.

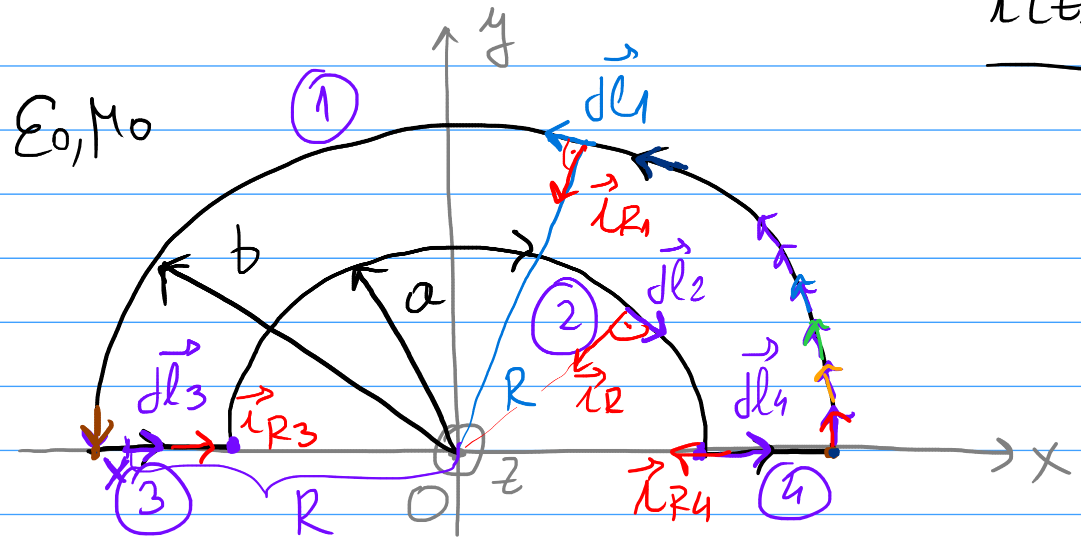
ЗАДАЦИ

1. У контури приказаној на слици постоји споропроменљива струја, дата изразом $i(t)=\sqrt{2}I\cos\omega t$, где су I и ω константе. Контура се налази у вакууму. Одредити комплексне изразе за векторе јачине: (а) електричног поља (б) магнетског поља у тачки O.



①

$i(t) = I\sqrt{2}\cos\omega t, \quad \underline{\vec{E}} = ?, \quad \underline{\vec{H}} = ?$



$\underline{I} = I$

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{4\pi}\oint_C \frac{\underline{I}\,\vec{dl} \times \vec{i}_R}{R^2}$$

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_{ind} = -j\omega\underline{\vec{A}} = -j\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{\underline{I}\,\vec{dl}}{R}$$

$$\underline{\vec{E}}_{ind} = \underline{\vec{E}}_{ind1} + \underline{\vec{E}}_{ind2} + \underline{\vec{E}}_{ind3} + \underline{\vec{E}}_{ind4}$$

$$\underline{\vec{E}}_{ind1} = -\frac{j\omega\mu_0\underline{I}}{4\pi}\int_{L_1}\frac{\vec{dl}}{b} = -\frac{j\omega\mu_0\underline{I}}{4\pi b}\int_{L_1}\vec{dl} = +\frac{j\omega\mu_0\underline{I}}{4\pi\cancel{b}}\,2\cancel{b}(+\vec{i}_x)$$

$$\underline{\vec{E}}_{ind1} = \frac{j\omega\mu_0\underline{I}}{2\pi}\vec{i}_x$$

$$\vec{E}_{ind2} = -\frac{j\omega\mu_0 I}{4\pi}\int_{L_2}\frac{d\vec{l}}{a} = -\frac{j\omega\mu_0 I}{4\pi a}\,2a\,\vec{i}_x = -\frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi}\vec{i}_x$$

$$\vec{E}_{ind3} = -\frac{j\omega\mu_0 I}{4\pi}\int_{L_3}\frac{d\vec{l}}{R} = \cancel{-}\frac{j\omega\mu_0 I}{4\pi}\int_{x=-b}^{x=-a}\frac{dx\,\vec{i}_x}{\cancel{-}x} = \frac{j\omega\mu_0 I}{4\pi}\vec{i}_x \ln\frac{-a}{-b}$$

$$\vec{E}_{ind3} = \frac{j\omega\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{a}{b}\,\vec{i}_x$$

$$\vec{E}_{ind4} = -\frac{j\omega\mu_0 I}{4\pi}\int_{x=a}^{x=b}\frac{dx\,\vec{i}_x}{x} = -\frac{j\omega\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{b}{a}\,\vec{i}_x$$

$$\vec{E}_{ind} = \overset{0}{\cancel{\vec{E}_{ind1}+\vec{E}_{ind2}}} + \vec{E}_{ind3}+\vec{E}_{ind4} = 2\vec{E}_{ind4} = \boxed{-\frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\,\vec{i}_x}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{l}\times\vec{i}_R}{R^2}$$

$$\vec{H}_3 = \vec{H}_4 = 0 \quad (d\vec{l} \times \vec{i}_R = 0)$$

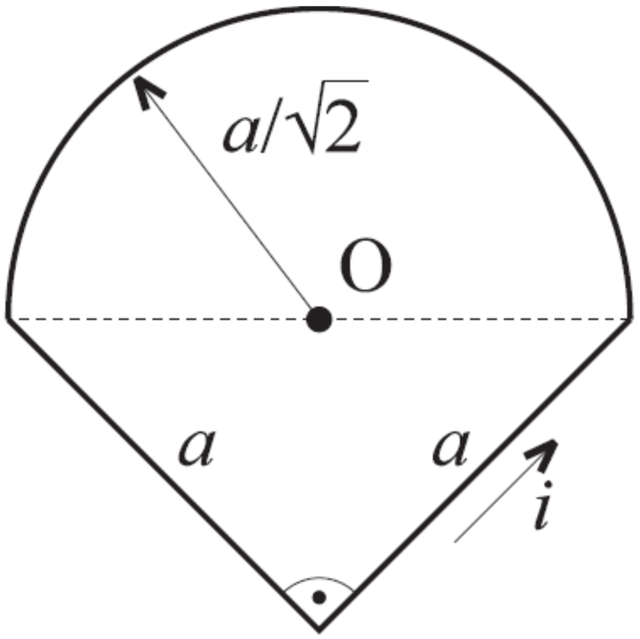
$$\vec{H}_1 = \frac{I}{4\pi b^2} \int_{L_1} d\vec{l} \times \vec{i}_R = \frac{I}{4\pi b^2} \int_{L_1} dl\, \vec{i}_z = \frac{I}{4\pi b^2} \vec{i}_z\, b\pi = \frac{I}{4b} \vec{i}_z$$

$$\vec{H}_2 = \frac{I}{4\pi a^2} \int_{L_2} dl\,(-\vec{i}_z) = \frac{I}{4\pi a^2} (-\vec{i}_z)\, a\pi = -\frac{I}{4a} \vec{i}_z$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \boxed{\frac{I}{4}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \vec{i}_z}$$

211. Na slici 211 je prikazana planarna žičana kontura u vakuumu, u kojoj postoji sporo promenljiva prostoperiodična struja jačine $i = I\sqrt{2}\cos\omega t$. Odrediti kompleksni ~~Pointingov vektor~~ u tački O. (*Z820602*)

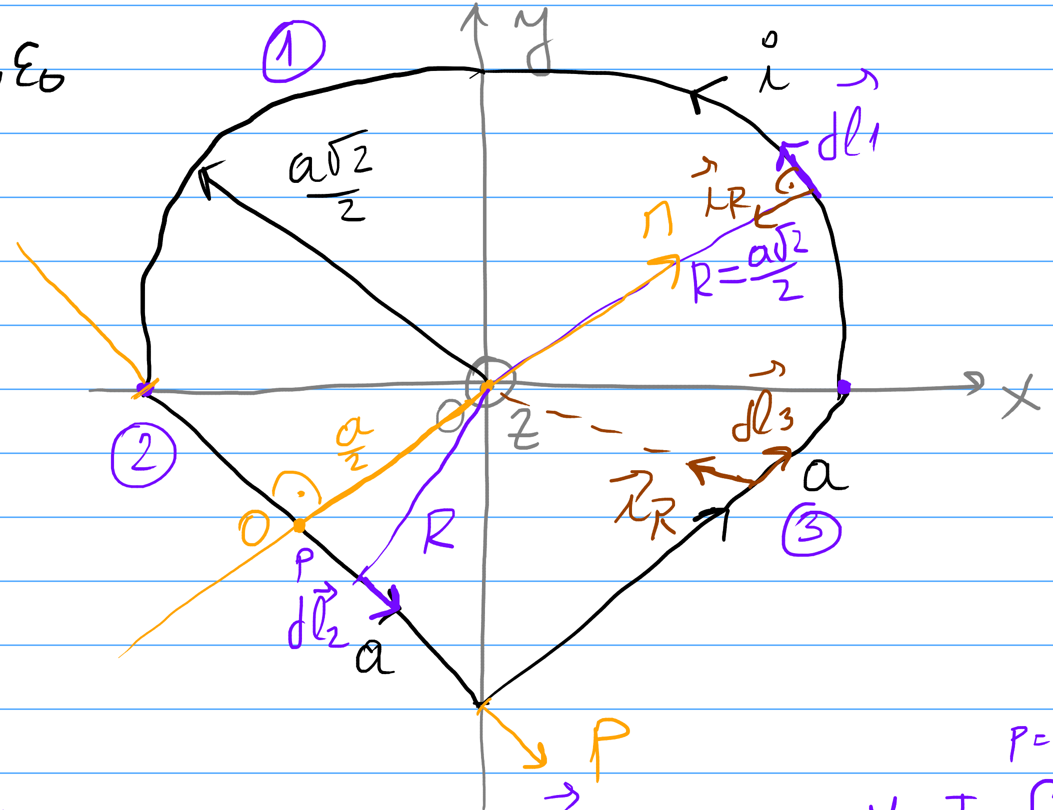
$\vec{E}, \vec{H}$



Slika 211.

211 $\quad i = I\sqrt{2}\cos\omega t, \quad \vec{E} = ? \quad \vec{H} = ?$

μ_0, ε_0



$$I = I$$

$$\vec{E} = -j\omega A = -j\omega \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{dl}}{R}$$

$$\vec{E_1} = -j\omega \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \int_{l_1} \vec{dl}$$

$$\vec{E_1} = \frac{\cancel{-} j\omega\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi \cancel{a}} \cdot a\sqrt{2}(\cancel{-}\vec{i_x})$$

$$\vec{E_1} = \frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi} \vec{i_x}$$

$$\vec{E_2} = -j\omega \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{l_2} \frac{\vec{dl}}{R} = -j\omega \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{p=-\frac{a}{2}}^{p=\frac{a}{2}} \frac{dp\, \vec{i_p}}{\sqrt{p^2 + (\frac{a}{2})^2}}, \quad \vec{i_p} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i_x} - \vec{i_y})$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{j\omega\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\vec{i}_x - \vec{i}_y)\cdot \ln\left|p + \sqrt{p^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right|\Bigg|_{-a/2}^{a/2}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{j\omega\mu_0 I\sqrt{2}}{8\pi}\,(\vec{i}_x - \vec{i}_y)\;\ln\frac{\frac{a}{\cancel{2}} + \frac{a\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{-\frac{a}{\cancel{2}} + \frac{a\sqrt{2}}{\cancel{2}}}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{j\omega\mu_0 I\sqrt{2}}{8\pi}\,(\vec{i}_x - \vec{i}_y)\;\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{j\omega\mu_0 I\sqrt{2}}{8\pi}\,\ln(\sqrt{2}+1)^2\,(\vec{i}_x - \vec{i}_y)$$

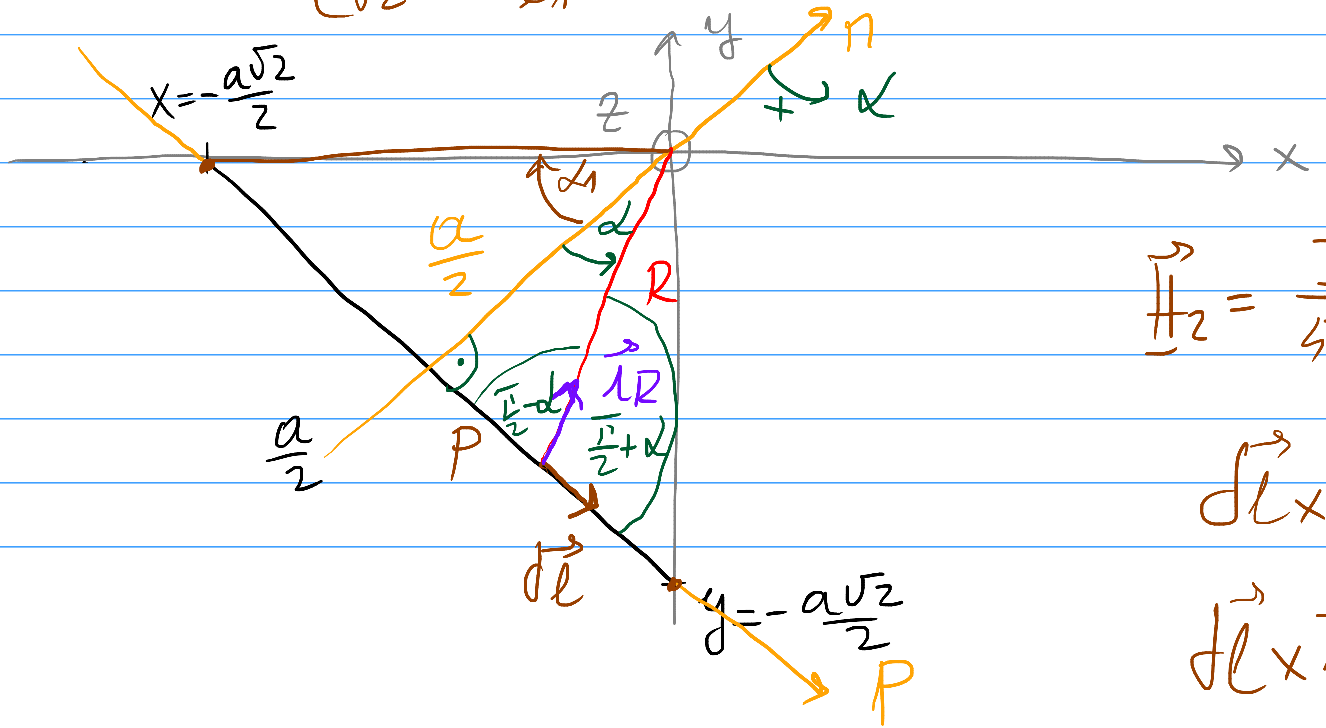
$$\vec{E}_2 = -\frac{j\omega\mu_0 I\sqrt{2}}{4\pi}\,\ln(\sqrt{2}+1)\,(\vec{i}_x - \vec{i}_y) = \underline{E}_2(\vec{i}_x - \vec{i}_y)$$

$$\vec{E}_3 = \underline{E}_2\,(\vec{i}_x + \vec{i}_y) = -\frac{j\omega\mu_0 I\sqrt{2}}{4\pi}\,\ln(\sqrt{2}+1)\,(\vec{i}_x + \vec{i}_y)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \boxed{\frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi}\left(1-\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right)\vec{i}_x}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{l}\times\vec{i}_R}{R^2}$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{4\pi}\frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}\int_{l_1} dl\cdot\vec{i}_z = \frac{I}{\cancel{4\pi}\frac{a^2}{\cancel{2}}}\cancel{\pi}\cdot\frac{\cancel{a}\sqrt{2}}{\cancel{2}}\vec{i}_z = \frac{I\sqrt{2}}{4a}\vec{i}_z$$



$$\vec{H}_2 = \frac{I}{4\pi}\int_{l_2}\frac{d\vec{l}\times\vec{i}_R}{R^2}$$

$$d\vec{l}\times\vec{i}_R = dp\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\vec{i}_z$$

$$d\vec{l}\times\vec{i}_R = \cos\alpha\, dp\,\vec{i}_z$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{2R} \qquad R = \frac{a}{2\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2p}{a} \qquad p = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha \qquad dp = \frac{d\left(\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)}{d\alpha}\, d\alpha$$

$$dp = \frac{a \; d\alpha}{2\;\cos^2\alpha}$$

$$\vec{H}_2 = \frac{I}{4\pi}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{4}}^{\alpha=\frac{\pi}{4}} \frac{\vec{\imath}_z \cos\alpha\, \cancel{a}\, d\alpha\; 4\cancel{\cos^2\alpha}}{2\cancel{\cos^2\alpha}\; a^{\cancel{2}}} = \frac{I}{4\pi}\,\vec{\imath}_z\,\frac{1}{2a}\,4\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\alpha\, d\alpha$$

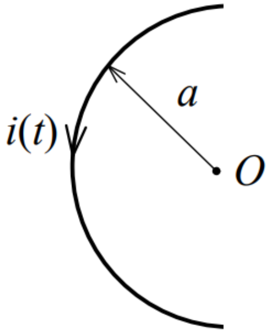
$$\vec{H}_2 = \frac{I\vec{\imath}_z}{2\pi a}\,\sin\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{I\sqrt{2}}{2\pi a}\,\vec{\imath}_z$$

$$\vec{H}_3 = \vec{H}_2 \qquad \vec{H} = \vec{H}_1 + 2\vec{H}_2 = \boxed{\frac{I\sqrt{2}}{a}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}\right)\vec{\imath}_z}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

26. август 2024.

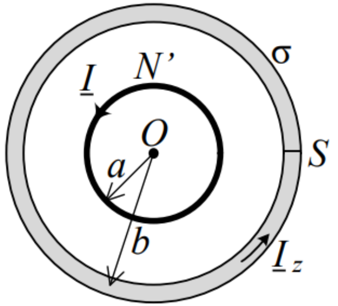
2. У делу контуре, облика полукружне нити полупречника a, постоји споропроменљива струја $i(t)$. Одредити израз за интензитет вектора индукованог електричног поља у центру полукруга (тачка O). Средина је вакуум.



ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

22. августа 2022.

2. Веома дугачак соленоид, полупречника попречног пресека a и подужне густине завојака N' налази се у вакууму. У завојцима соленоида постоји споропроменљива простопериодична струја, угаоне учестаности ω и ефективне вредности I. Концентрично, око соленоида, постављена је танка хомогена жичана контура, полупречника b и специфичне проводности σ, тако да је површ контуре нормална на осу соленоида. Ако се у контури индукује струја јачине $\underline{I}_z$, одредити у комплексном облику, израз за јачину струје којом се напаја соленоид, $\underline{I}$. Занемарити магнетско поље које потиче од струје у контури.



ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

17. септембар 2024.

1. У контури приказаној на слици постоји споропроменљива струја, дата изразом $i(t)=\sqrt{2}I\cos\omega t$, где су I и ω константе. Контура се налази у вакууму. Одредити у комплексном облику изразе за векторе јачине (а) електричног поља и (б) магнетског поља у тачки O.