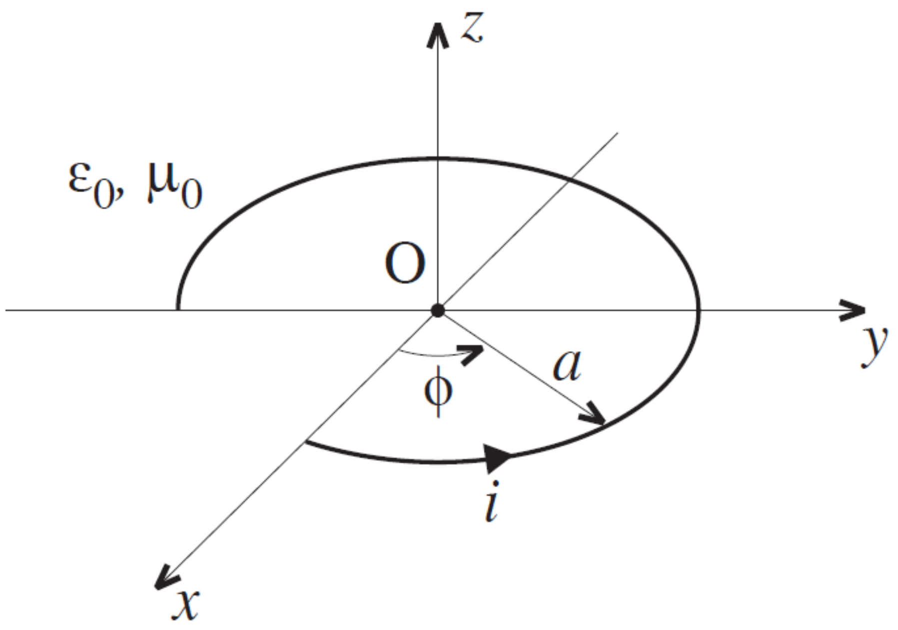
298. Tanka žičana kontura je savijena u obliku kružnog luka poluprečnika a i čini deo jedne složene žičane antene (slika 298.1). U konturi postoji prostoperiodična struja visoke ugaone učestanosti ω,



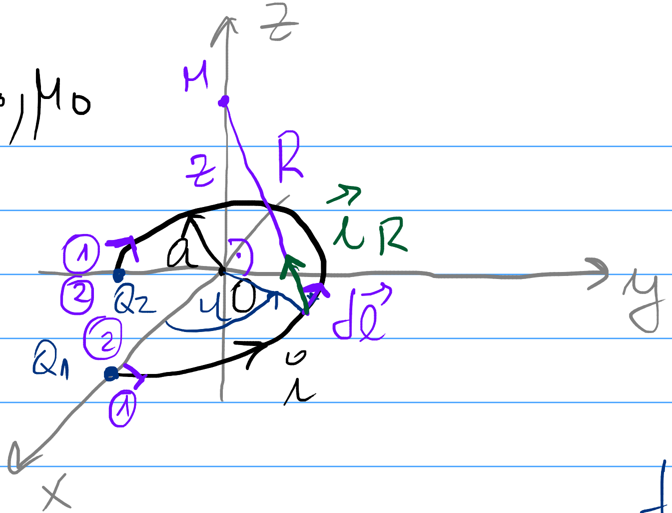
Slika 298.1.

$$i(\phi, t) = \sqrt{2} I_0 \sin\phi \cos(\omega t) \ , \quad (0 \le \phi \le 3\pi/2) \ . \tag{298.1}$$

(a) Odrediti raspodelu linijskih naelektrisanja na konturi. U tačkama z-ose odrediti: (b) zakasneli magnetski vektor-potencijal, (c) zakasneli električni skalar-potencijal koji potiče od naelektrisanja određenih pod (a) i (d) vektor jačine magnetskog polja. (*Z970731*)

298

ε_0, μ_0



$\underline{i} = \sqrt{2} I_0 \sin\varphi \cos\omega t, \quad \varphi \in [0, \frac{3\pi}{2}], \quad \underline{Q}' = ?, \quad \underline{Q} = ?$

$\underline{\vec{A}}(0,0,z) = ?, \quad \underline{V}(0,0,z) = ?, \quad \underline{\vec{H}}(0,0,z) = ?$

$\underline{I} = I_0 \sin\varphi$

$\frac{d\underline{I}}{dl} = -j\omega \underline{Q}' \qquad \frac{d\underline{I}}{a\,d\varphi} = -j\omega \underline{Q}'$

$\underline{Q}' = \frac{1}{-j\omega a} \frac{d}{d\varphi}(I_0 \sin\varphi) \qquad \boxed{\underline{Q}' = \frac{j}{\omega a} I_0 \cos\varphi}$

$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 = -j\omega \underline{Q} \qquad \underline{I}_2 = 0 \qquad \underline{I}_1 = -j\omega \underline{Q} \qquad \underline{Q} = \frac{j}{\omega} \underline{I}_1$

$\underline{Q}_1 = \underline{Q}(\varphi = 0) = \frac{j}{\omega} \underline{I}(\varphi = 0) = \boxed{0} \qquad \underline{Q}_2 = \underline{Q}(\varphi = \frac{3\pi}{2}) = \frac{j}{\omega}\left(-\underline{I}(\varphi = \frac{3\pi}{2})\right) = \boxed{\frac{jI_0}{\omega}}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I\, d\vec{l}\, e^{-j\beta R}}{R} \quad , \quad \boxed{R = \sqrt{a^2 + z^2}} = \text{const.}$$

$$d\vec{l} = a\, d\varphi\, \vec{i}_\varphi = a\, d\varphi \left(-\sin\varphi\, \vec{i}_x + \cos\varphi\, \vec{i}_y\right)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta R}}{R} I_0 a \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{3\pi}{2}} \sin\varphi \left(-\sin\varphi\, \vec{i}_x + \cos\varphi\, \vec{i}_y\right) d\varphi$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I_0 a\, e^{-j\beta R}}{4\pi R} \left(\vec{i}_x \int_0^{\frac{3\pi}{2}} -\sin^2\varphi\, d\varphi + \vec{i}_y \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi \right)$$

$$Int_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{3\pi/2} \cos 2\varphi\, d\varphi$$

$$Int_1 = \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Int_2 = \int_0^{3\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \int_0^{-1} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\underline{\vec{A}} = \frac{\mu_0 I_0 a e^{-j\beta R}}{4\pi R}\left(-\frac{3\pi}{4}\vec{i}_x + \frac{1}{2}\vec{i}_y\right)}$$

$$\underline{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\underline{Q}' e^{-j\beta R}}{R}\,dl + \frac{\underline{Q}_2 e^{-j\beta R}}{4\pi\varepsilon_0 R}, \qquad R = \sqrt{a^2+z^2}, \quad dl = a\,d\varphi$$

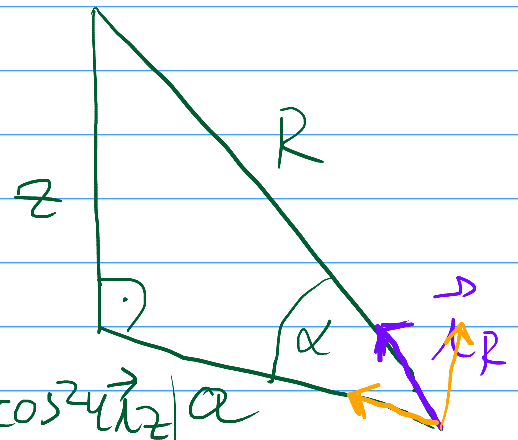
$$\underline{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,\cancel{a}\,\frac{jI_0}{\omega\cancel{a}}\int_0^{3\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{jI_0 e^{-j\beta R}}{\omega\,4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\boxed{\underline{V} = -\frac{jI_0 e^{-j\beta R}}{\omega 4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{jI_0 e^{-j\beta R}}{\omega\,4\pi\varepsilon_0 R}} = \boxed{0}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\underline{I}\, d\vec{l}\,(1+j\beta R)\, e^{-j\beta R} \times \vec{i}_R}{R^2} \quad , \quad d\vec{l} = a\, d\varphi\, \vec{i}_\varphi = $$

$$= a\, d\varphi\,(-\sin\varphi\, \vec{i}_x + \cos\varphi\, \vec{i}_y)$$

$$\vec{i}_R = -\frac{a}{R}\vec{i}_r + \frac{z}{R}\vec{i}_z$$



$$\vec{i}_R = \frac{z}{R}\vec{i}_z - \frac{a}{R}(\cos\varphi\, \vec{i}_x + \sin\varphi\, \vec{i}_y)$$

$$\vec{i}_\varphi \times \vec{i}_R = \frac{z}{R}\sin\varphi\, \vec{i}_y + \frac{a}{R}\sin^2\varphi\, \vec{i}_z + \frac{z}{R}\cos\varphi\, \vec{i}_x + \frac{a}{R}\cos^2\varphi\, \vec{i}_z \Big| a$$

$$\vec{i}_\varphi \times \vec{i}_R = \frac{z}{R}\cos\varphi\, \vec{i}_x + \frac{z}{R}\sin\varphi\, \vec{i}_y + \frac{a}{R}\vec{i}_z$$

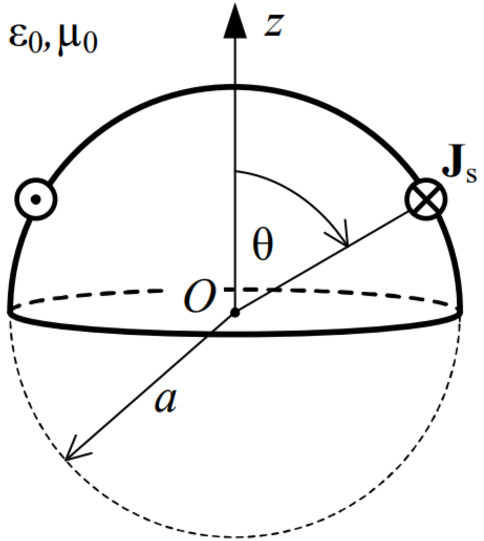
$$\vec{H} = \frac{\underline{I}_0\,(1+j\beta R)\, e^{-j\beta R}}{4\pi R^2}\, a \int_0^{3\pi/2} \sin\varphi \left(\frac{z}{R}\cos\varphi\, \vec{i}_x + \frac{z}{R}\sin\varphi\, \vec{i}_y + \frac{a}{R}\vec{i}_z \right) d\varphi$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{I_0 (1+j\beta R)\, e^{-j\beta R}\, a}{4\pi R^3} \left(\frac{z}{2} \vec{i}_x + z \frac{3\pi}{4} \vec{i}_y + a \vec{i}_z \right)}$$

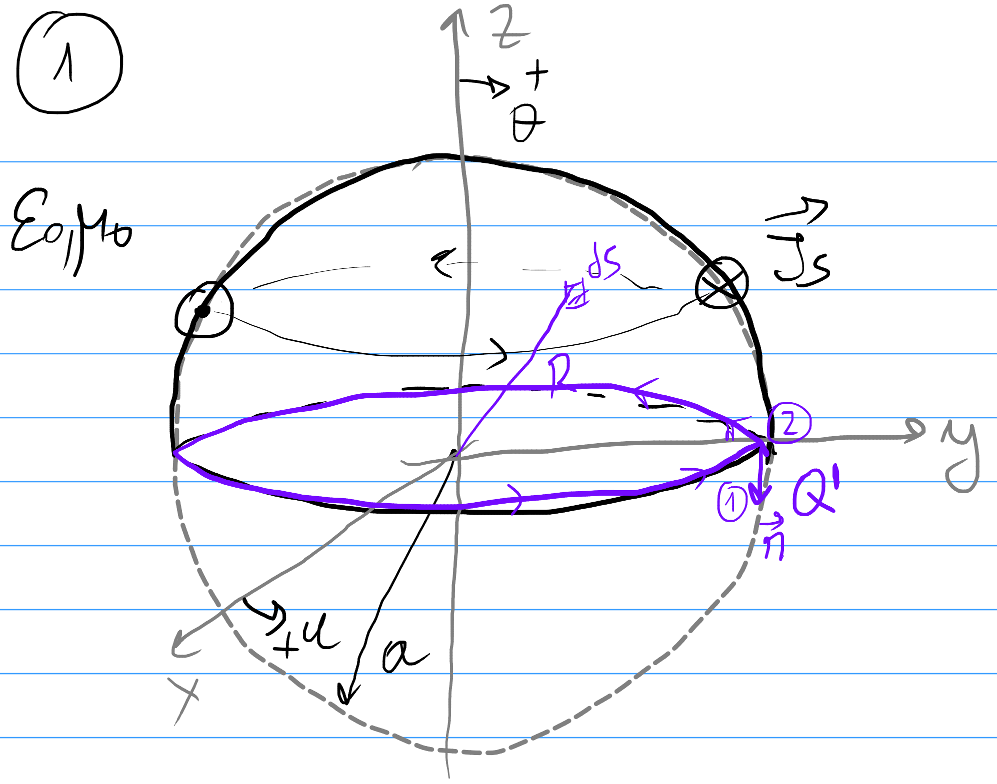
ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

8. фебруар 2021.

1. У вакууму постоје брзо промењиве простопериодичне струје само по површи полусфере, која је приказана на слици. Полупречник сфере је a, а део на коме постоје струје дефинисан је сферним координатама $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \phi \le 2\pi$. Површинска густина струје је позната и дата је изразом $\mathbf{J}_s = \sqrt{2} J_{s0} \sin\theta \sin\phi \cos\omega t\, \mathbf{i}_\phi$. Одредити изразе за: (а) комплексни вектор густине површинских струја, (б) комплексне представнике расподеле површинског и линијског наелектрисања и (в) комплексни вектор индукованог електричног поља у тачки O.



1



$a, \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \ \varphi \in [0, 2\pi],$

$\vec{J}_s = \sqrt{2} J_{s0} \sin\theta \sin\varphi \cos\omega t \, \vec{i}_\varphi,$

$\underline{\vec{J}_s} = ?, \ \underline{\rho_s} = ?, \ \underline{Q'} = ?, \ \underline{\vec{E}_{ind}} = ?$

$$\boxed{\underline{\vec{J}_s} = J_{s0} \sin\theta \sin\varphi \, \vec{i}_\varphi}$$

$$\mathrm{div}_s \underline{\vec{J}_s} = -j\omega \underline{\rho_s} \qquad \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial \underline{J_{s\varphi}}}{\partial \varphi} = -j\omega \underline{\rho_s}$$

$$\frac{1}{a \cancel{\sin\theta}} J_{s0} \cancel{\sin\theta} \cos\varphi = -j\omega \underline{\rho_s}$$

$$\boxed{\underline{\rho_s} = \frac{-J_{s0}\cos\varphi}{j\omega a}}$$

$$\vec{n} \cdot (\cancelto{0}{\underline{\vec{J}_{s1}}} - \cancelto{0}{\underline{\vec{J}_{s2}}}) = -j\omega \underline{Q'}$$

$$\boxed{\underline{Q'} = 0}$$

$$\vec{E}_{ind} = -j\omega\vec{A} = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{J}_s e^{-j\beta R}}{R} dS$$

$$dS = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$R = a$$

$$\vec{E}_{ind} = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{J_{s0}\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i}_\varphi e^{-j\beta a}}{\cancel{a}} a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\vec{i}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i}_x + \cos\varphi\,\vec{i}_y$$

$$\vec{E}_{ind} = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi} J_{s0}\, a\, e^{-j\beta a}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2\theta\sin\varphi\left(-\sin\varphi\,\vec{i}_x + \cos\varphi\,\vec{i}_y\right) d\varphi \, d\theta$$

$$\vec{E}_{ind} = -\frac{j\omega\mu_0 J_{s0}\, a\, e^{-j\beta a}}{4\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, d\theta \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} -\sin^2\varphi\,\vec{i}_x \, d\varphi + \cancelto{0}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\,\vec{i}_y \, d\varphi}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi \, d\varphi = \int_0^0 t \, dt = 0$$

$$\vec{E}_{ind} = -\frac{j\omega\mu_0 J_{s0}\, a\, e^{-j\beta a}}{4\pi}(-\vec{i}_x)\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x - \frac{\sin 2x}{2}}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta = \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

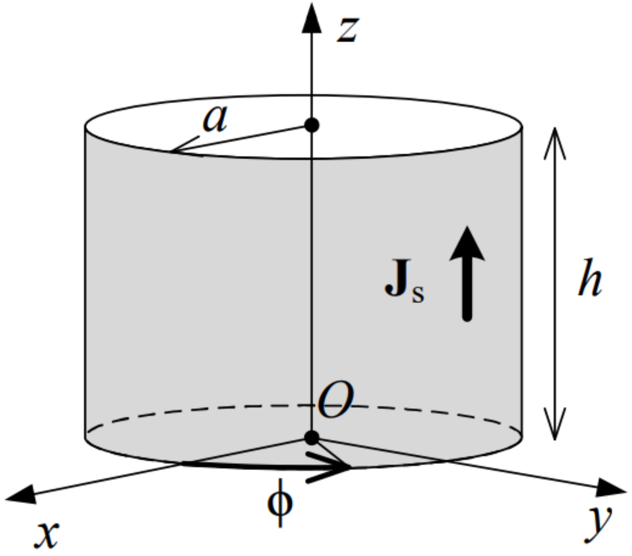
$$\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi = \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\vec{E}_{ind} = \frac{j\omega\mu_0 J_{s0}\, a\, e^{-j\beta a}}{4\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\pi\,\vec{i}_x = \boxed{\frac{j\omega\mu_0 J_{s0}\,\pi\, a\, e^{-j\beta a}}{16}\vec{i}_x}$$

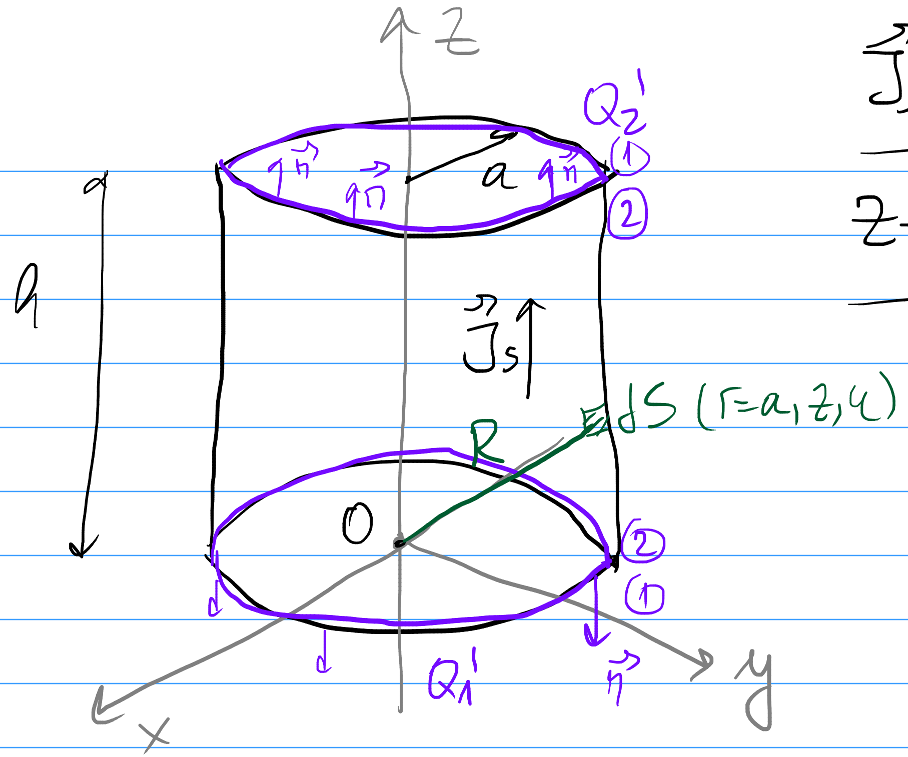
ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

26. јун 2023.

1. У вакууму постоји простопериодична струја, високе кружне учестаности ω, само по омотачу цилиндра полупречника a и висине h, као на слици. Вектор густине струје дат је изразом $\mathbf{J}_\mathrm{s} = \sqrt{2} J_{\mathrm{s}0} (z/a) \cdot \sin(\phi/2) \cos \omega t \, \mathbf{i}_z$, где је $J_{\mathrm{s}0}$ константа, $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, $0 \le z \le h$ и $0 \le \phi \le 2\pi$. (а) Одредити расподелу површинског и линијског наелектрисања на омотачу цилиндра. (б) Одредити комплексни вектор јачине индукованог електричног поља у тачки O.



(1)



$$\underline{\vec{J}_s} = \sqrt{2}\, J_{s0}\,\frac{z}{a}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\omega t\,\vec{i}_z,\quad \beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0},$$

$$z\in[0,h],\quad \varphi\in[0,2\pi],\quad \underline{\rho_s}=?,\quad \underline{Q'}=?,\quad \underline{\vec{E}_{ind}}=?$$

$$\boxed{\underline{\vec{J}_s} = J_{s0}\,\frac{z}{a}\sin\frac{\varphi}{2}\,\vec{i}_z}$$

$$\mathrm{div}_s\,\underline{\vec{J}_s} = -j\omega\,\underline{\rho_s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(J_{s0}\,\frac{z}{a}\sin\frac{\varphi}{2}\right) = -j\omega\,\underline{\rho_s}$$

$$\vec{n}\cdot\left(\cancelto{0}{\underline{\vec{J}_{s1}}} - \underline{\vec{J}_{s2}}\right) = -j\omega\,\underline{Q'}$$

$$\underline{\vec{J}_s}(z=0) = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{Q'_1} = 0}$$

$$\boxed{\underline{\rho_s} = \frac{j}{\omega}\,\frac{J_{s0}\sin\frac{\varphi}{2}}{a}}$$

$$\vec{n}\cdot\left(\cancel{-}\vec{J}_s(z=h)\right) = \cancel{-}j\omega \underline{Q_2'} \qquad J_{so}\frac{h}{a}\sin\frac{\varphi}{2} = j\omega \underline{Q_2'}$$

$$\boxed{\underline{Q_2'} = \frac{-j J_{so} h}{\omega a}\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$\underline{\vec{E}_{ind}} = -j\omega \underline{\vec{A}} = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{J}_s\, e^{-j\beta R}}{R}\,ds \,, \qquad ds = a\,dz\,d\varphi$$

$$R = \sqrt{a^2+z^2}$$

$$\underline{\vec{E}_{ind}} = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi}\,\frac{J_{so}\,\vec{i}_z}{\cancel{a}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h} z\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\,\frac{e^{-j\beta\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}}\,\cancel{a}\,dz\,d\varphi$$

$$\underline{\vec{E}_{ind}} = -\frac{j\omega\mu_0 J_{so}}{4\pi}\,\vec{i}_z\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\int_{z=0}^{h}\frac{z\,e^{-j\beta\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}}\,dz$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -2\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = \underline{4}$$

$$\underline{\vec{E}_{ind}} = -\frac{j\omega\mu_0 J_{s0}\,\vec{i}_z}{\cancel{4}\pi}\,\cancel{4}\int_{z=0}^{h} \frac{z e^{-j\beta\sqrt{a^2+z^2}}}{\sqrt{a^2+z^2}}\, dz \qquad \left\{\begin{aligned} t &= \sqrt{a^2+z^2} \\ dt &= \frac{\cancel{2}z\, dz}{\cancel{2}\sqrt{a^2+z^2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\underline{\vec{E}_{ind}} = -\frac{j\omega\mu_0 J_{s0}}{\pi}\,\vec{i}_z \int_{a}^{\sqrt{a^2+h^2}} e^{-j\beta t}\, dt$$

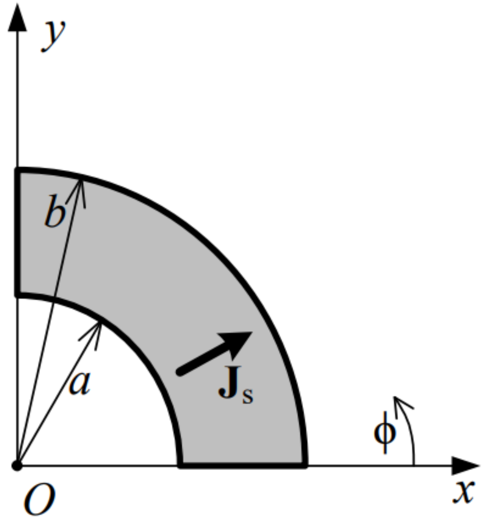
$$\underline{\vec{E}_{ind}} = \cancel{-}\frac{j\omega\mu_0 J_{s0}}{\pi}\,\vec{i}_z \left(\cancel{-}\frac{1}{j\beta}\right) e^{-j\beta t}\Big|_a^{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\boxed{\vec{E}_{ind} = \frac{\omega \mu_0 J_{s0}}{\beta \pi}\left(e^{-j\beta\sqrt{a^2+h^2}} - e^{-j\beta a}\right)\vec{i}_z}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

7. септембар 2017.

1. У вакууму постоји простопериодична струја, високе кружне учестаности ω, само по површи исечка кружног прстена полупречника a и b, као на слици. Вектор површинске густине струје дат је изразом у цилиндричном координатном систему $\mathbf{J}_{\mathrm{s}} = \sqrt{2} J_{\mathrm{s}0} \cos(\omega t)\, \mathbf{i}_r$, где је $J_{\mathrm{s}0}$ константа, $a < r < b$ и $0 < \phi < \pi/2$. Одредити (а) расподелу наелектрисања исечка, (б) комплексни вектор јачине индукованог електричног поља у тачки O и (в) комплексни вектор јачине магнетског поља у тачки O.



ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

1. фебруар 2024.

1. У вакууму постоји брзопроменљива простопериодична струја, кружне учестаности ω, по површи у облику четвртине кружног прстена, полупречника a и b, као на слици. Вектор густине површинске струје дат је изразом у цилиндричном координатном систему, $\mathbf{J}_\mathrm{s} = \sqrt{2} J_{\mathrm{s}0} \sin(2\phi) \cos(\omega t + \beta r) \mathbf{i}_\phi$, $a \le r \le b$, $0 \le \phi \le \pi/2$, где је $J_{\mathrm{s}0}$ константа и $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Одредити у комплексном облику изразе за (а) расподелу површинског и подужног наелектрисања прстена и (б) магнетски вектор потенцијал у тачки O.