

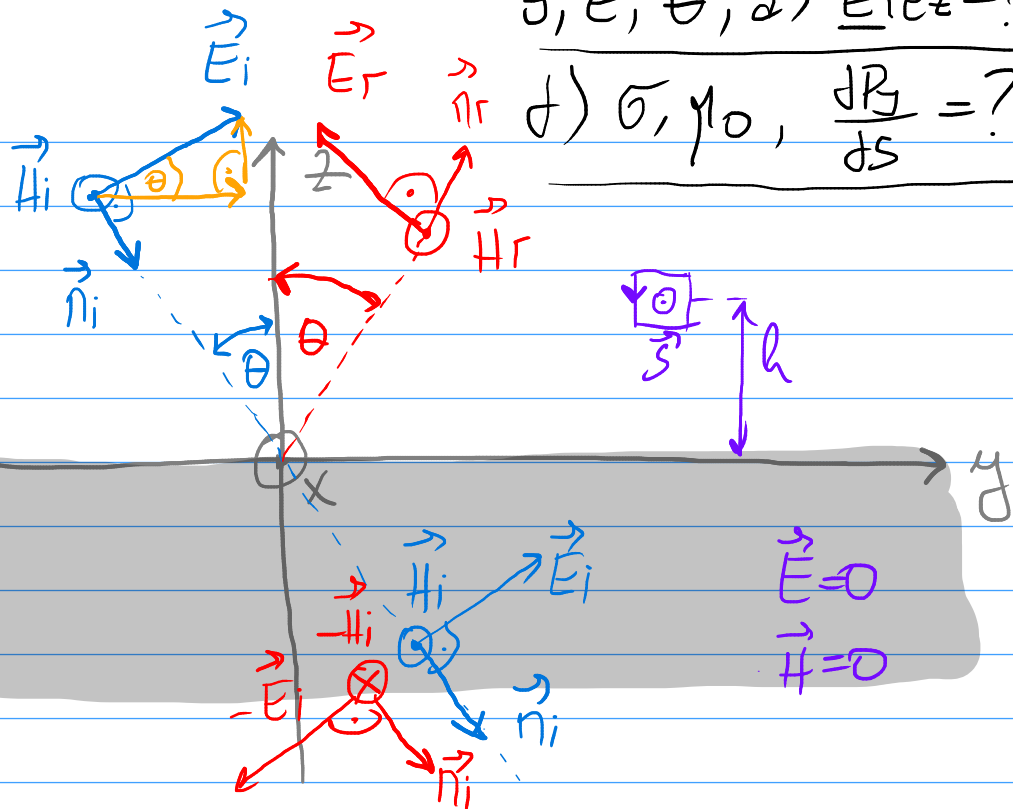
336. Ravan, uniforman, prostoperiodičan, paralelno polarizovan TEM talas, učestanosti f i efektivne vrednosti električnog polja E , nailazi iz vakuuma, pod uglom θ u odnosu na normalu, na savršeno provodnu ravan. Odrediti (a) rezultantno elektromagnetsko polje iznad ravni, (b) srednju vrednost gustine energije elektromagnetskog polja iznad ravni, (c) kompleksni Pointingov vektor iznad ravni i (d) površinsku gustinu srednje snage Džulovih gubitaka u provodnoj ravni, ako je ona napravljena od dobrog provodnika specifične provodnosti σ i permeabilnosti μ_0 .

(e) Na osnovu rezultata pod (c) odrediti u kom se pravcu i smeru prostire rezultantni elektromagnetski talas.

(f) Na koju visinu treba postaviti i kako orijentisati malu ravnu konturu površine S , tako da amplituda ems indukovane u njoj bude maksimalna? Koliko iznosi ta maksimalna amplituda? (Z950402,Z950611,Z971002)

g) $\underline{S}_S = ?$, $\underline{\vec{J}}_S = ?$

336

$$\epsilon_0, \mu_0$$


f, ϵ , θ , α) $\vec{E}_{rez}=?$, $\vec{H}_{rez}=?$, b) $(W_{em})_{sr}=?$, c) $\vec{J}=?$,
d) σ , γ_0 , $\frac{dR}{ds}=?$ e) $\vec{\kappa}_P$, f) S , $h=?$, $e_{ind,max}=?$
g) $\underline{S}_S=?$, $\vec{J}_S=?$

$$\vec{E}_i = E e^{-\beta \vec{r} \cdot \vec{n}_i} \cdot \vec{u}_{Ei}$$

$$\vec{r} = x\vec{r}_x + y\vec{r}_y + z\vec{r}_z$$

$$\vec{n}_i = \sin\theta \vec{y} - \cos\theta \vec{z}$$

$$\vec{\lambda}_{E1} = \cos\theta \vec{\lambda}_y + \sin\theta \vec{\lambda}_z$$

$$\vec{E}_i = E (\cos\theta \vec{r}_y + \sin\theta \vec{r}_z) e^{-j\beta(y\sin\theta - z\cos\theta)}$$

$$\underline{H}_i = \frac{1}{Z_0} \underline{\hat{n}}_i \times \underline{E}_i = \frac{E}{Z_0} e^{-j\beta(y \sin \theta - z \cos \theta)} (\sin^2 \theta \hat{x} + \cos^2 \theta \hat{x})$$

$$\underline{H}_1 = \frac{E}{z_0} \hat{x} e^{-j\beta(y \sin \theta - z \cos \theta)}$$

$$\vec{n}_r = \sin\theta \vec{u}_y + \cos\theta \vec{u}_z \quad \vec{u}_{Er} = -\cos\theta \vec{u}_y + \sin\theta \vec{u}_z$$

$$\vec{E}_r = E_{r0} \vec{u}_{Er} e^{-\partial \beta \vec{r} \cdot \vec{n}_r}$$

$$\vec{E}_r = E_{r0} (-\cos\theta \vec{u}_y + \sin\theta \vec{u}_z) e^{-\partial \beta (y \sin\theta + z \cos\theta)}$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{z_0} \vec{n}_r \times \vec{E}_r$$

$$\vec{H}_r = \frac{E_{r0}}{z_0} e^{-\partial \beta (y \sin\theta + z \cos\theta)} (\sin^2\theta \vec{u}_x + \cos^2\theta \vec{u}_x)$$

$$\vec{H}_r = \frac{E_{r0}}{z_0} \vec{u}_x e^{-\partial \beta (y \sin\theta + z \cos\theta)}$$

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{\tan, z=0} = 0$$

$$\cancel{E \cos\theta \vec{u}_y e^{-\partial \beta y \sin\theta}} + \cancel{E_{r0} \vec{u}_y (-\cos\theta) e^{-\partial \beta y \sin\theta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{r0} = E$$

$$\vec{E}_{rez} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$$

$$\vec{E}_{rez} = E e^{-j\beta y \sin\theta} \left(\cos\theta e^{j\beta z \cos\theta} \vec{u}_y + \sin\theta e^{j\beta z \cos\theta} \vec{u}_z - \cos\theta e^{-j\beta z \cos\theta} \vec{u}_y + \sin\theta e^{-j\beta z \cos\theta} \vec{u}_z \right)$$

$$\vec{E}_{rez} = 2E e^{-j\beta y \sin\theta} \left(j \cos\theta \sin(\beta z \cos\theta) \vec{u}_y + \sin\theta \cos(\beta z \cos\theta) \vec{u}_z \right)$$

$$\vec{H}_{rez} = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \frac{E}{Z_0} e^{-j\beta y \sin\theta} \vec{u}_x \left(e^{-j\beta z \cos\theta} + e^{j\beta z \cos\theta} \right)$$

$$\vec{H}_{rez} = \frac{2E}{Z_0} e^{-j\beta y \sin\theta} \cos(\beta z \cos\theta) \vec{u}_x$$

$$W_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}_{rez}(t)|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 |\vec{H}_{rez}(t)|^2$$

$$(W_{em})_{sr} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}_{rez}|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 |\vec{H}_{rez}|^2$$

$$(W_{em})_{sr} = \frac{1}{2} \epsilon_0 4E^2 (\cos^2\theta \sin^2(\beta z \cos\theta) + \sin^2\theta \cos^2(\beta z \cos\theta) + \cos^2(\beta z \cos\theta))$$

$$(W_{em})_{sr} = 2\epsilon_0 E^2 (\cos^2\theta \sin^2(\beta z \cos\theta) + (1 + \sin^2\theta) \cos^2(\beta z \cos\theta))$$

$$\vec{J} = \vec{E}_{rez} \times \vec{H}_{rez}^* = \vec{E}_{rez} \times \frac{2E}{z_0} \cos(\beta z \cos\theta) e^{j\beta y \sin\theta} \vec{\lambda}_x$$

$$\vec{J} = \frac{4E^2}{z_0} \cos(\beta z \cos\theta) (-j \cos\theta \sin(\beta z \cos\theta) \vec{\lambda}_z + \sin\theta \cos(\beta z \cos\theta) \vec{\lambda}_y)$$

$$\frac{dP_J}{ds} = R_s \cdot |\vec{H}_{rez}|^2_{\tan z=0} = \sqrt{\frac{\pi \mu_0 f}{\sigma}} \frac{4E^2}{z_0^2}$$

$$\vec{\lambda}_p = \frac{\vec{J}_{re}}{|\vec{J}_{re}|} = \boxed{\vec{\lambda}_y}$$

$$\underline{e}_{ind} = -j\omega \vec{B}_{rez} \cdot \vec{S} = -j\omega \mu_0 \vec{H}_{rez} \cdot \vec{S}$$

коэффициент y O_z -параллелен

$$\underline{e}_{ind} = -j\omega \mu_0 \frac{2E}{z_0} \cos(\beta z \cos\theta) e^{-\alpha \beta y \sin\theta} S$$

$$e_{ind} = \omega \mu_0 \frac{2E}{z_0} |\cos(\beta h \cos\theta)| S$$

$$e_{ind} = e_{indmax} \Rightarrow |\cos(\beta h \cos\theta)| = 1, \quad \cos(\beta h \cos\theta) = \pm 1$$

$$\beta h \cos\theta = k \cdot \pi, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

$$h = \frac{k\pi}{\beta \cos\theta} = \frac{k\lambda}{2 \cos\theta}, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

$$e_{indmax} = \frac{2E\omega\mu_0 S}{z_0}$$

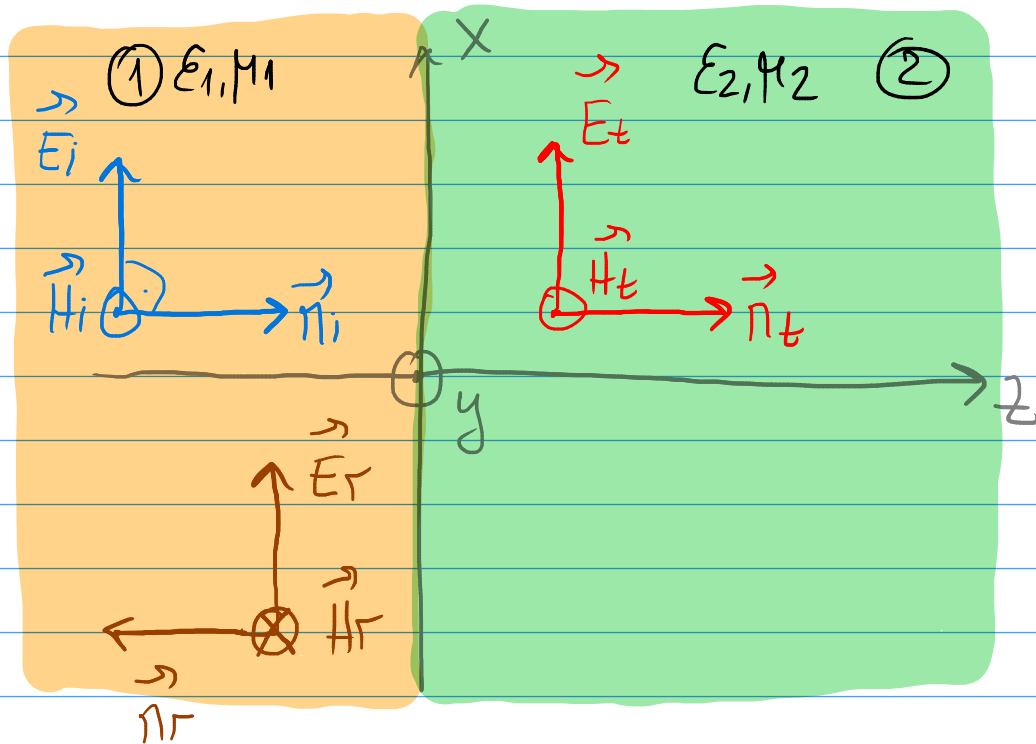
$$e_{indmax}(t) = e_{indmax} \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2} E \omega \mu_0 S}{z_0}$$

$$\underline{S}_S = \vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \vec{r}_z \cdot \epsilon_0 \vec{E}_{re z} \Big|_{z=0} = \boxed{2E e^{-\alpha \beta y \sin \theta} \epsilon_0 \sin \theta}$$

$$\underline{J}_S = \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{r}_z \times \vec{H}_{re z} \Big|_{z=0} = \boxed{\frac{2E}{z_0} e^{-\alpha \beta y \sin \theta} \vec{r}_y}$$

339. Ravan, uniforman, linijski polarizovan, prostoperiodičan TEM talas, efektivne vrednosti električnog polja E i učestanosti f , nailazi upravno na ravnu razdvojnu površ dva homogena, savršena dielektrika, parametara ε_1, μ_1 i ε_2, μ_2 . Talas nailazi iz dielektrika 1. Odrediti (a) koeficijente refleksije i transmisije, (b) elektromagnetsko polje reflektovanog i transmitovanog talasa, (c) resultantno elektromagnetsko polje u prvom dielektriku i (d) koeficijent stojećih talasa. (Z910123)

339 $E, f, \epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2, R=?, I=?, \underline{E}_r=?, \underline{E}_t=?, \underline{H}_r=?, \underline{H}_t=?, \underline{E}_1=?, \underline{H}_1=?$



KST=?

$$\underline{E}_i = E e^{-j\beta_1 z} \vec{\lambda}_x$$

$$\underline{H}_i = \frac{E}{z_1} e^{-j\beta_1 z} \vec{\lambda}_y$$

$$\underline{E}_r = E_{r0} e^{j\beta_1 z} \vec{\lambda}_x$$

$$\underline{H}_r = \frac{E_{r0}}{z_1} e^{j\beta_1 z} (-\vec{\lambda}_y)$$

$$\underline{E}_t = E_{t0} e^{-j\beta_2 z} \vec{\lambda}_x$$

$$\underline{H}_t = \frac{E_{t0}}{z_2} e^{-j\beta_2 z} \vec{\lambda}_y$$

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} = \boxed{2\pi f \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$

$$\beta_1 = 2\pi f \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \quad z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \Big|_{z=0}^{\tan} = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \Big|_{z=0}^{\tan} = 0$$

$$(\vec{E}_1 + \vec{E}_r) \Big|_{z=0} = \vec{E}_t \Big|_{z=0}$$

$$(\vec{H}_1 + \vec{H}_r) \Big|_{z=0} = \vec{H}_t \Big|_{z=0}$$

$$E + E_{ro} = E_{to}$$

$$E + E_{ro} = E_{to}$$

$$\frac{E}{z_1} - \frac{E_{ro}}{z_1} = \frac{E_{to}}{z_2}$$

$$E - E_{ro} = \frac{z_1}{z_2} E_{to}$$

$$\left. \begin{array}{l} E + E_{ro} = E_{to} \\ E - E_{ro} = \frac{z_1}{z_2} E_{to} \end{array} \right\} + 2E = E_{to} \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right)$$

$$E_{to} = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} E$$

$$E_{ro} = E_{to} - E = E \left(\frac{2z_2}{z_1 + z_2} - 1 \right) = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} E$$

$$\vec{E}_r = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} E e^{j\beta_1 z} \vec{u}_x$$

$$\vec{H}_r = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \frac{E}{z_1} e^{j\beta_1 z} (-\vec{u}_y)$$

$$\vec{E}_t = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} E e^{-j\beta_2 z} \vec{u}_x$$

$$\vec{H}_t = \frac{2E}{z_1 + z_2} e^{-j\beta_2 z} \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \left[E \vec{u}_x \left(e^{-j\beta_1 z} + \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} e^{j\beta_1 z} \right) \right]$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \left[\frac{E}{z_1} \vec{u}_y \left(e^{-j\beta_1 z} - \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} e^{j\beta_1 z} \right) \right]$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_t \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_t$$

$$I = \frac{E_{to}}{E_{io}} = \boxed{\frac{2z_2}{z_1 + z_2}}$$

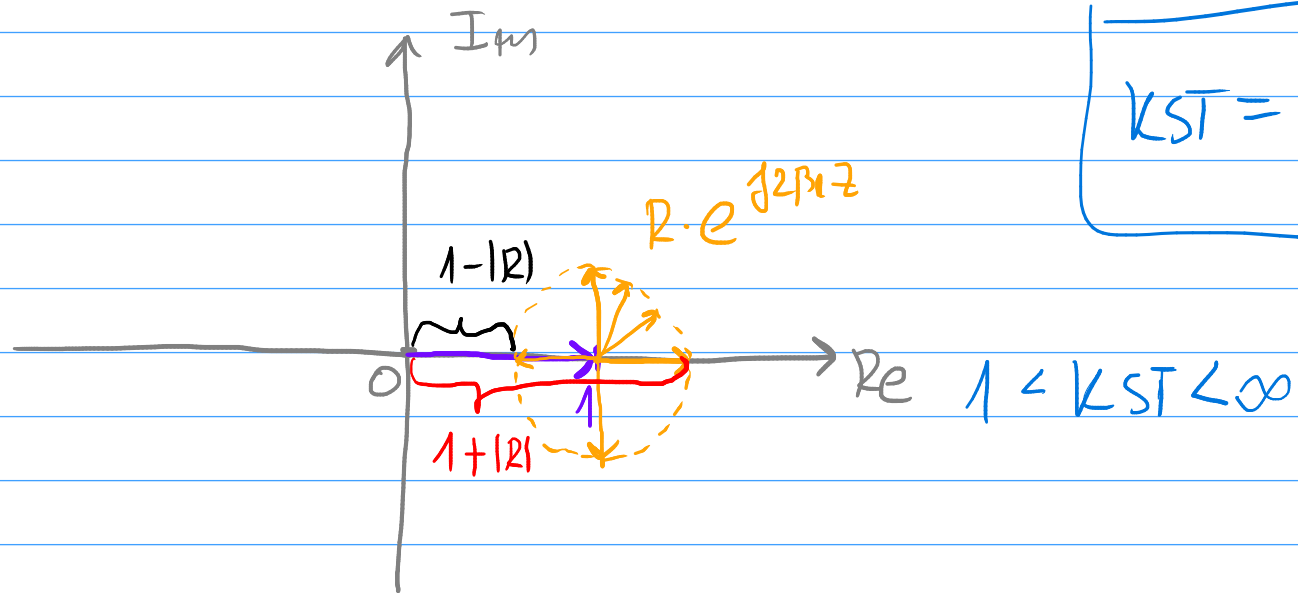
$$R = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \boxed{\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}}$$

$$\left(T > 0, R \geq 0, |R| < 1 \right)$$

$$K_{ST} = \frac{|E_1|_{\max}}{|E_1|_{\min}}, \quad \vec{E}_1 = E e^{-j\beta_1 z} (1 + R e^{j2\beta_1 z}) \vec{u}_x$$

$$K_{ST} = \frac{\cancel{E} |1 + R e^{j2\beta_1 z}|_{\max}}{\cancel{E} |1 + R e^{j2\beta_1 z}|_{\min}}$$

$$2\beta_1 z \in [0, 2\pi]$$

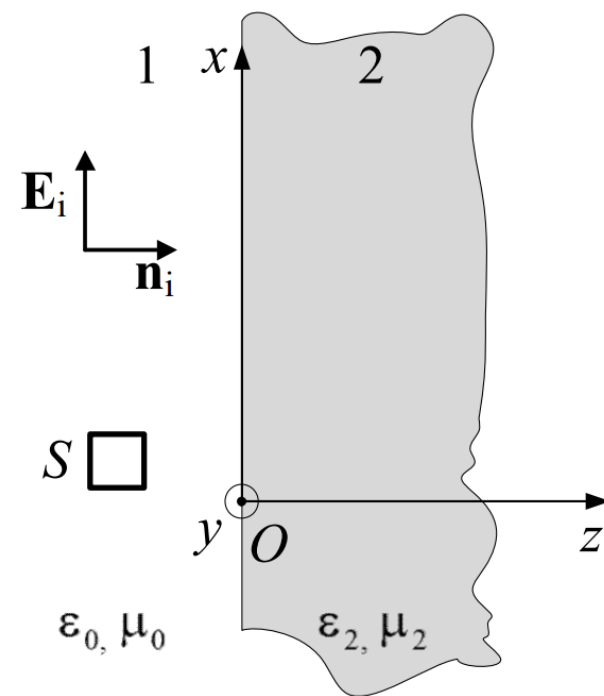


$$K_{ST} = \frac{1 + |R|}{1 - |R|}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

22. септембар 2023.

2. Раван униформан простопериодичан линијски поларизован ТЕМ талас, ефективне вредности јачине електричног поља E и учестаности f , наилази из вакуума (средина 1) нормално на бесконачну раздвојну површ са савршеним диелектриком (средина 2), пермитивности $\epsilon_2 = \epsilon_r \epsilon_0$ и пермеабилности $\mu_2 = \mu_0$, као на слици. (а) За координатни систем са слике извести изразе за резултантне комплексне векторе јачине електричног и магнетског поља у вакууму и диелектрику. (б) Где у вакууму треба поставити електрички малу, равну контуру, паралелну xOz -равни и површине $S = 10 \text{ cm}^2$, тако да ефективна вредност индуковане емс у њој буде максимална? Израчунати ту максималну ефективну емс, ако је $E = 0,7 \text{ V/m}$, $\epsilon_r = 3$ и $f = 200 \text{ MHz}$.



② $f, \epsilon_2 = \epsilon_r \epsilon_0, \mu_2 = \mu_0, \vec{E}_1 = ?, \vec{E}_2 = ?, \vec{H}_1 = ?, \vec{H}_2 = ?, z_{opt} = ?, S = 10 \text{ cm}^2, E = 0,7 \frac{V}{m},$

$\epsilon_r = 3, f = 200 \text{ MHz}, c_{indmax} = ?$

$$\vec{E}_t = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} E e^{-j\beta_2 z} \vec{u}_x \quad \vec{H}_t = \frac{2E}{z_1 + z_2} e^{-j\beta_2 z} \vec{u}_y$$

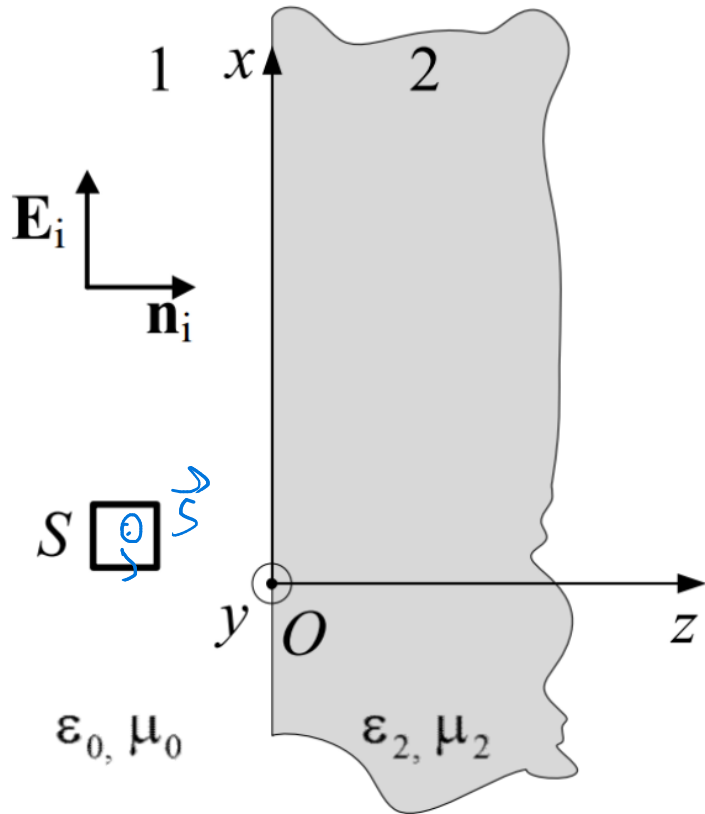
$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \left[E \vec{u}_x \left(e^{-j\beta_1 z} + \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} e^{j\beta_1 z} \right) \right]$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \left[\frac{E}{z_1} \vec{u}_y \left(e^{-j\beta_1 z} - \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} e^{j\beta_1 z} \right) \right]$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = z_0 \quad z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \beta_1 = 2\pi f \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\beta_2 = 2\pi f \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\epsilon_r} \beta_1$$

$$\vec{E}_1 = E \vec{u}_x \left(e^{-j\beta_1 z} + \frac{\frac{z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} - z_0}{\frac{z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} + z_0} e^{j\beta_1 z} \right)$$



$$\vec{E}_1 = E \vec{\lambda}_x \left(e^{-j\beta_1 z} + \frac{1-\sqrt{\epsilon_r}}{1+\sqrt{\epsilon_r}} e^{j\beta_1 z} \right)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{E}{z_0} \vec{\lambda}_y \left(e^{-j\beta_1 z} - \frac{1-\sqrt{\epsilon_r}}{1+\sqrt{\epsilon_r}} e^{j\beta_1 z} \right)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_t = \frac{2 \frac{z_0}{\sqrt{\epsilon_r}}}{\frac{z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} + z_0} E e^{-j\beta_2 z} \vec{\lambda}_x = \left[\frac{2}{1+\sqrt{\epsilon_r}} E e^{-j\beta_2 z} \vec{\lambda}_x \right]$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_t = \frac{2}{1+\sqrt{\epsilon_r}} \frac{E}{\frac{z_0}{\sqrt{\epsilon_r}}} e^{-j\beta_2 z} \vec{\lambda}_y = \left[\frac{2\sqrt{\epsilon_r}}{1+\sqrt{\epsilon_r}} \frac{E}{z_0} e^{-j\beta_2 z} \vec{\lambda}_y \right]$$

$$P_{\text{ind}} = -j\omega \vec{B}_1 \cdot \vec{S} = -j\omega \mu_0 \vec{H}_1 \cdot \vec{S} = -j\omega \mu_0 H_1 S \quad P_{\text{ind}} = \omega \mu_0 H_1 S$$

$$H_1 = \frac{E}{z_0} e^{-j\beta_1 z} \left(1 - \frac{1-\sqrt{\epsilon_r}}{1+\sqrt{\epsilon_r}} e^{j2\beta_1 z} \right)$$

$$H_1 = \frac{E}{z_0} \left| 1 - \frac{1-\sqrt{\epsilon_r}}{1+\sqrt{\epsilon_r}} e^{j2\beta_1 z} \right| = \frac{E}{z_0} \left| 1 - \underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}_{\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}} e^{j2\beta_1 z} \right|$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 0 \quad H_1 = H_{1\max} \Rightarrow e^{j2\beta_1 z} = 1$$

$$2\beta_1 z = 2k\pi, \quad z < 0$$

$$z = \frac{k\pi}{\beta_1} \quad k = -1, -2, -3, \dots$$

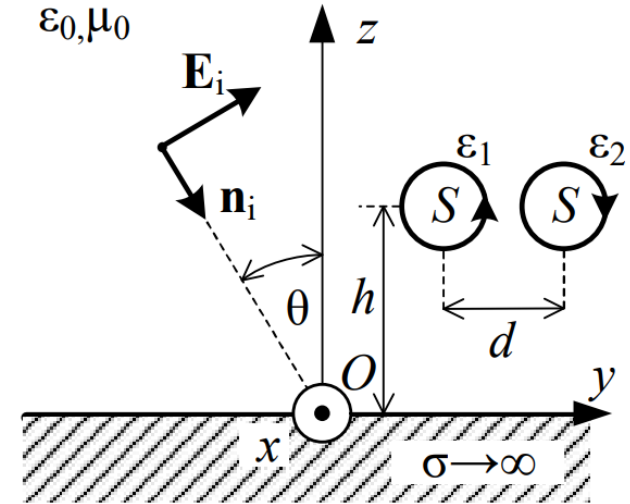
$$e_{ind\max} = \omega \mu_0 S H_{1\max}$$

$$e_{ind\max} = 2\pi f \mu_0 S \frac{E}{z_0} \left(1 + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right) = \boxed{3,72 \text{ nV}}$$

ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОГ)

11. јануар 2024.

2. Раван простопериодичан паралелно поларизован ТЕМ талас, таласне дужине у вакууму $\lambda = 1 \text{ m}$, наилази из вакуума на бесконачну савршено проводну равн, под непознатим углом $\theta \in [0, \pi/2)$ у односу на нормалу на раздвојну површ, као што је приказано на слици. Две електрички мале равне контуре, једнаких површина, $S = \frac{1}{2\pi} \text{ cm}^2$, постављене су на висини $h = 4 \text{ m}$ изнад проводне равни. Контуре леже у инцидентној равни, а центри су им на међусобном растојању $d = \sqrt{3}/3 \text{ m}$. Ефективна вредност индуковане електромоторне силе у контури 1 је $\varepsilon_1 = 0,3 \text{ mV}$. Према реферетним смеровима означеним на слици, комплексни представници индукованих електромоторних силе контура, $\underline{\varepsilon}_1$ и $\underline{\varepsilon}_2$, су у фази. Израчунати (а) угао θ , (б) ефективну вредност електричног поља инцидентног таласа E_i и (в) ефективну вредност густине површинских наелектрисања на раздвојној површи ρ_s .



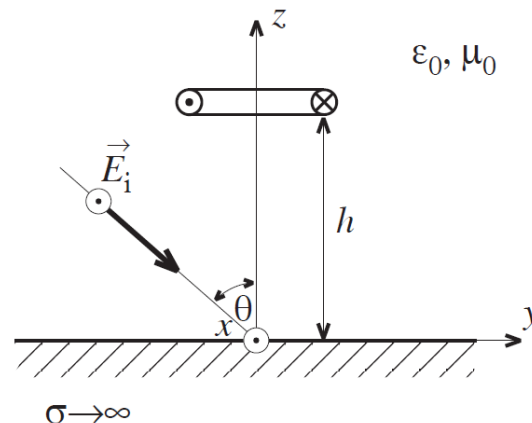
334. Ravan, uniforman, prostoperiodičan, normalno polarizovan TEM talas, efektivne vrednosti električnog polja E i ugaone učestanosti ω , nailazi iz vakuuma, pod uglom θ u odnosu na normalu, na savršeno provodnu ravan (slika 334.1). Odrediti (a) rezultantno električno i magnetsko polje iznad ravni, (b) raspodelu indukovanih struja i naelektrisanja na ravni, (c) srednju vrednost gustine energije elektromagnetskog polja iznad ravni i (d) efektivnu vrednost ems indukovane u maloj, horizontalnoj, nepokretnoj konturi, površine S , koja se nalazi na visini $h = \frac{4\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cos \theta}$ iznad provodne ravni.

(X) Kolika je trenutna vrednost indukovane ems u maloj, horizontalnoj konturi, površine S , koja se kreće u smeru y -ose brzinom v , ako se u trenutku $t = 0$ kontura nalazila u tački sa koordinatama $(x, y, z) = (0, 0, h_c)$.

(f) Kako treba orijentisati malu, ravnu, nepokretnu konturu, koja se nalazi na visini h_c iznad ravni, da bi efektivna vrednost indukovane ems u njoj bila maksimalna? Odrediti tu maksimalnu efektivnu ems, ako je površina konture S .

(g) Izračunati površinsku gustinu srednje snage Džulovih gubitaka u provodnoj ravni, ako je ona načinjena od dobrog provodnika, parametara μ i σ .

(X) Pokazati da se određene ravni u vakuumu mogu metalizovati, a da se pri tome ne promeni struktura elektromagnetskog polja. Da li se na taj način može formirati talasovod pravougaonog preseka? Ako može, odrediti brzinu prostiranja i talasnu dužinu elektromagnetskog talasa duž talasovoda. (Z831003,Z911102,Z960331,Z970420)



Slika 334.1.