

# ИСПИТ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОФ, ОЕ, ОС, ИР)

17. септембар 2024.

**Напомене.** Испит траје 180 минута и ради се самостално. Није дозвољено напуштање сале 60 минута од почетка испита. Писати искључиво хемијском оловком са плавим или црним мастилом. Дозвољена је употреба непрограмабилних калкулатора. Дозвољена је употреба само овога папира и једне вежбанке, који се морају предати. Питања радити искључиво на овоме папиру, а задатке искључиво у вежбанци. Коначне одговоре на питања и тражена извођења уписати у одговарајуће кућице, учртати у дијаграме или заокружити понуђене одговоре. Одговори без извођења се неће признати. Свако питање носи по 5 поена, а задатак по 20 поена.

Попунити податке о кандидату у следећој табели. Исте податке написати и на омоту вежбанке.

ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ (попуњава кандидат)							КОЛОКВИЈУМ				
Индекс година/број		Презиме и име									
/							ИСПИТ				
ПИТАЊА					ЗАДАЦИ						
1.	2.	3.	4.	5.	6.	Укупно	1.	2.	Укупно	УКУПНО ПОЕНА	ОЦЕНА

## ПИТАЊА

1. (а) Написати потпуни систем Максвелових једначина за брзопроменљиво електромагнетско поље у вакууму, у диференцијалном облику. (б) Полазећи од тих израза, извести таласну једначину за вектор јачине магнетског поља.

(а)	(б)
-----	-----

2. У свакој тачки домена  $v'$  у вакууму, у коме постоји брзопроменљиво електромагнетско поље, познати су запреминска густина наелектрисања  $\rho(\mathbf{r}', t)$  и вектор густине запреминске струје  $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$ , где је  $\mathbf{r}'$  вектор положаја посматране тачке. У тачки са вектором положаја  $\mathbf{r}$  написати израза за (а) електрични скалар-потенцијал  $V(\mathbf{r}, t)$  и магнетски вектор-потенцијал  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  и (б) вектор јачине електричног поља  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и вектор магнетске индукције  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ .

(а)	(б)
-----	-----

3. Раван униформан простопериодичан кружно поларизован ТЕМ талас, учестаности  $f$ , простире се у вакууму у смеру  $+y$ -осе. Вектор јачине електричног поља овог таласа има ефективну вредност  $E_0$ , десно је поларизован и у тренутку  $t = 0$ , у координатном почетку, лежи на  $+z$ -оси. У Декартовом координатном систему написати израз за комплексни вектор јачине електричног поља овог таласа.

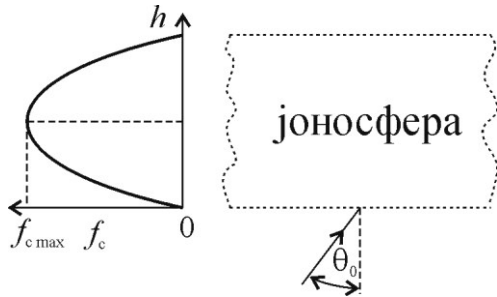
--

4. Коаксијални вод, задатог спољашњег полупречника  $b$ , начињен је од доброг проводника и испуњен је савршеним линеарним хомогеним диелектриком. Полазећи од израза за коефицијент слабљења при малим губицима, одредити однос полупречника проводника вода тако да коефицијент слабљења буде минималан.

--

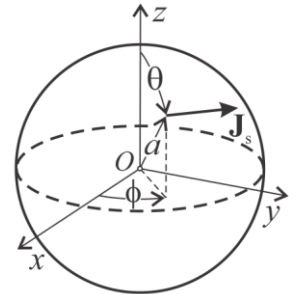
5. На улаз вода без губитака, карактеристичне импедансе  $Z_c = 50 \Omega$  и времена простирања кроз вод  $\tau = 1 \text{ ns}$ , прикључен је напонски генератор прилагођен на вод, чији напон има облик Хевисајдовога импулса амплитуде  $E = 5 \text{ V}$ , док је на излаз вода прикључена редна веза калема индуктивности  $L = 400 \text{ nH}$  и отпорника отпорности  $R = 150 \Omega$ . Полазећи од еквивалентних реалних напонских генератора којима се вод може заменити на страни побудног генератора, односно на страни пријемника, одредити израз за напон на улазу у вод и израчунати га у тренутку  $t = 3,5 \text{ ns}$ .

6. Полазећи од Снеловог закона, објаснити простирање таласа кроз јоносферу, чија је критична учестаност параболична функција висине, а у зависности од учестаности таласа  $f$  и упадног угла  $\theta_0$  (видети слику).

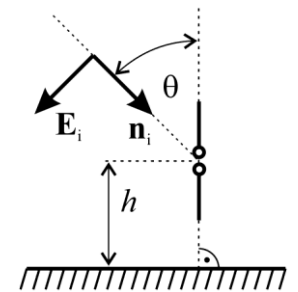


### ЗАДАЦИ

1. У вакууму постоје простопериодичне струје, високе кружне учестаности  $\omega$ , само по површи сфере полупречника  $a$ . У сферном координатном систему вектор густине површинских струја дат је изразом  $\mathbf{J}_s(\theta, \phi, t) = \sqrt{2} J_{s0} \sin \theta \cos \frac{\phi}{2} \cos \omega t \mathbf{i}_\phi$ , где је  $J_{s0}$  константа,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ . Одредити, у комплексном облику, изразе за: (а) густину површинских наелектрисања сфере, (б) вектор јачине електричног поља ових наелектрисања у координатном почетку (тачки  $O$ ), и (в) вектор јачине индукованог електричног поља у координатном почетку (тачки  $O$ ).



2. Пријемни полуталасни дипол постављен је у вакууму, вертикално изнад савршено проводне равни. На место пријема стиже инцидентни линијски поларизован раван униформан простопериодичан ТЕМ талас, ефективне вредности електричног поља  $E$  и учестаности  $f$ , под углом  $\theta < \pi/2$  у односу на вертикалу, као на слици. Вектор јачине електричног поља инцидентног таласа  $\mathbf{E}_i$ , јединични вектор правца и смера простирања инцидентног таласа  $\mathbf{n}_i$  и дипол леже у истој равни. (а) Сматрајући да је антена на висини  $h$  изнад савршено проводне равни, одредити израз за ефективну вредност електромоторне силе индуковане у диполу. (б) Одредити све могуће вредности  $h$  за које је ефективна вредност електромоторне силе индуковане у диполу максимална. (в) Ако су познати  $E = 0,75 \text{ V/m}$ ,  $f = 980 \text{ MHz}$ ,  $\theta = 50^\circ$  и најмање  $h$  одређено у претходној тачки, израчунати снагу коју пријемни дипол предаје прилагођеном пријемнику. Сматрати да је дипол без губитака.



**Напомена:** у сферном координатном систему је  $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (A_r r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$ .

**ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА И РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА  
ИСПИТА ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОФ, ОЕ, ОС, ИР),  
ОДРЖАНОГ 17. СЕПТЕМБРА 2024. ГОДИНЕ**

**ПИТАЊА**

1. (a)  $\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ ,  $\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ,  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ . (б)  $\Delta \mathbf{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$ .

2. (a)  $V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c_0})}{R} dv$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c_0})}{R} dv$ ,  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ .

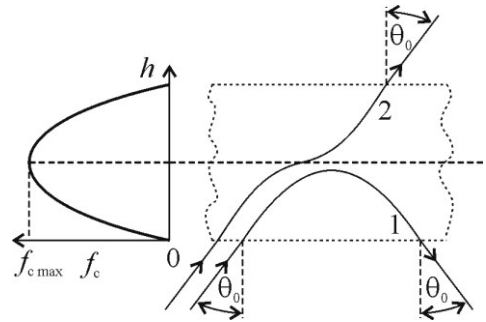
(б)  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\text{grad } V(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ .

3.  $\underline{\mathbf{E}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_z - j\mathbf{i}_x) e^{-j\beta y}$ ,  $\beta = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ .

4.  $\frac{b}{a} \approx 3,59$ .

5.  $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0,5Eh(t), & 0 \leq t < 2\tau \\ 0,5Eh(t) - 0,5Eh(t-2\tau) + \frac{R}{R+Z_c} E + \frac{Z_c}{R+Z_c} E e^{-\frac{t-2\tau}{\frac{L}{R+Z_c}}}, & t \geq 2\tau \end{cases}$ ,  $u(t = 3,5 \text{ ns}) = 4,34 \text{ V}$ .

6. При уласку у јоносферу талас се повија ка нормали. Ако је на било којој висини испуњен услов  $f_c = f \cos \theta_0$ , талас се повија надоле (пре достигања висине на којој је  $f_c = f_{c\text{max}}$ ) и излази под истим углом под којим је ушао у јоносферу (путања 1). У противном, ако важи  $f_{c\text{max}} < f \cos \theta_0$ , талас се након достигања висине на којој је  $f_c = f_{c\text{max}}$  повија ка нормали, пролази кроз јоносферу и напушта је под истим углом под којим је ушао у јоносферу (путања 2).



**ЗАДАЦИ**

1. (a)  $\underline{\rho}_s = -j \frac{J_{s0}}{2\omega a} \sin \frac{\phi}{2}$ , (б)  $\underline{\mathbf{E}}_q = j \frac{J_{s0}}{6\varepsilon_0 \omega a} (1 + j\beta a) e^{-j\beta a} \mathbf{i}_y$ , (в)  $\underline{\mathbf{E}}_{\text{ind}} = -j\omega \frac{\mu_0 J_{s0} a e^{-j\beta a}}{6} \mathbf{i}_y$ ,  $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ .

2. (a)  $\varepsilon = 2 \frac{c_0}{\pi f} E \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \left| \cos\left(2\pi \frac{f}{c_0} h \cos \theta\right) \right|$ . (б)  $h_k = \frac{c_0}{2f \cos \theta} k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (в)  $P_p = 35,3 \mu\text{W}$  ( $\varepsilon = 101,5 \text{ mV}$ ).

- РЕЗУЛТАТИ ИСПИТА БИЋЕ ОБЈАВЉЕНИ ДО 19. СЕПТЕМБРА У 10.00 НА САЈТУ ЗА ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКУ.
- УВИД У ЗАДАТКЕ ЈЕ 19. СЕПТЕМБРА ОД 18.00 ДО 18.15 у лабораторији 63.

Са предмета Електромагнетика