КОЛОКВИЈУМ ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ)

17. мај 2026.

Напомене. Колоквијум траје 120 минута и ради се самостално. Није дозвољено напуштање сале 60 минута од почетка колоквијума. Писати искључиво хемијском оловком са плавим или црним мастилом. Дозвољена је употреба непрограмабилних калкулатора. Дозвољена је употреба само овог папира и вежбанке, који се морају заједно предати. Питања радити искључиво на овоме папиру, а задатке искључиво у вежбанци. Коначне одговоре на питања и тражена извођења уписати у одговарајуће кућице, уцртати у дијаграме или заокружити понуђене одговоре. Одговори без извођења се неће признати. Свако питање носи по 5 поена, а сваки задатак по 20 поена.

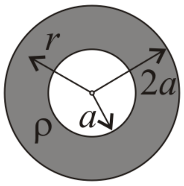
Попунити податке о кандидату у следећој таблици. Исте податке написати и на омоту вежбанке.

ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ		Укупно поена
Индекс година/број	Презиме и име	
/		

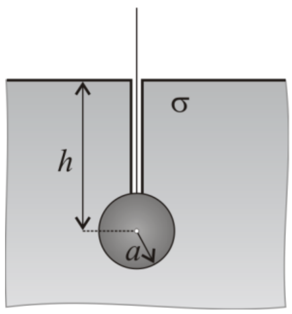
ПИТАЊА				ЗАДАЦИ	
1	2	3	4	1	2

ПИТАЊА

1. У ваздуху постоје наелектрисања константне густине ρ само по запремини сферне љуске унутрашњег полупречника a и спољашњег полупречника $2a$. Сматрајући да електрични потенцијал V зависи само од одстојање од центра љуске r, решавањем Поасонове једначине (у сферном координатном систему, са координатним почетком у центру љуске) одредити израз за потенцијал у тачкама у љусци ($a \le r \le 2a$). Познати су потенцијали на унутрашњој и спољашњој површи љуске, $V(r=a)=V_1$ и $V(r=2a)=2V_1$.



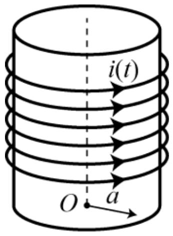
2. Извести израз за отпорност уземљења савршено проводног сферног уземљивача, полупречника a, укопаног у линеарну хомогену земљу, специфичне проводности σ, тако да му је центар на дубини h ($h >> a$).



3. (а) Написати потпуни систем диференцијалних једначина за стационарно магнетско поље. (б) Написати везу између вектора магнетске индукције и магнетског вектор–потенцијала. (в) Полазећи од претходних израза, извести диференцијалну једначину коју задовољава магнетски вектор–потенцијал, у вакууму, у домену у чијој је свакој тачки познат вектор густине запреминске струје $\mathbf{J}$.

(а)	(б)	(в)

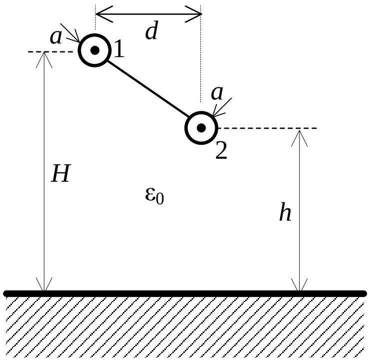
4. На слици је приказан део врло дугачког соленоида у ваздуху, полупречника попречног пресека a, у чијим завојцима, подужне густине N', постоји споро промењљива струја јачине $i(t)$. (а) Полазећи од израза за магнетски вектор-потенцијал, показати како изгледају линије индукованог електричног поља у соленоиду. (б) Одредити интензитет вектора јачине индукованог електричног поља у соленоиду и ван њега.



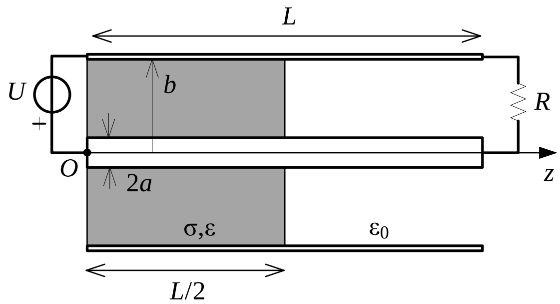
(а)	(б)

ЗАДАЦИ

1. Два веома дугачка паралелна цилиндрична проводника, полупречника попречног пресека a, постављена су у ваздуху изнад бесконачне проводне равни. Проводник 1 је на висини H, а проводник 2 на висини h изнад проводне равни. Хоризонтално растојање између оса проводника је d, при чему важи $H, h, d >> a$. Одредити изразе за (а) коефицијенте потенцијала овог система проводника и (б) подужну капацитивност вода који се добија галванским спајањем проводника 1 и 2, као што је приказано на слици, у функцији коефицијената потенцијала одређених у тачки (а).



2. На улаз правог коаксијалног вода дужине L, унутрашњег полупречника a и спољашњег полупречника b, прикључен је генератор временски константног напона U. На други крај вода прикључен је отпорник отпорности R. Прва половина вода испуњена је линеарним хомогеним диелектриком специфичне проводности σ и пермитивности ε, док је друга испуњена ваздухом, као на слици. Занемарујући ивичне ефекте, одредити изразе за (а) проводност вода и (б) вектор јачине магнетског поља у унутрашњости вода, $a < r < b$, $0 \le z \le L$.



Напомена: у сферном координатном систему је

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{i}_\phi ,$$

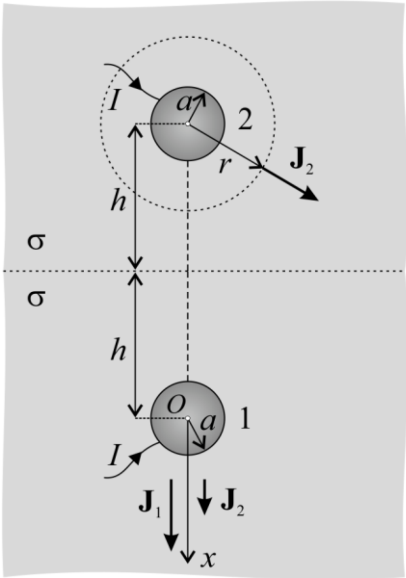
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} .$$

ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА И РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА КОЛОКВИЈУМА ИЗ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИКЕ (ОТ), ОДРЖАНОГ 17. МАЈА 2026. ГОДИНЕ

ПИТАЊА

1. 1. $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}, a<r<b \Rightarrow\ V=-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2-\frac{C_1}{r}+C_2,\ C_1=2aV_1+\frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0},\ C_2=3V_1+\frac{7\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0}$.

2.



Према теореми ликова за стационарно струјно поље, поље у хомогеној земљи неће се променити ако вакуум заменимо хомогеном земљом и изнад раздвојне површи уведемо расподелу струја симетричну (у односу на раздвојну површ) расподели струја у хомогеној земљи, као на слици.

Пошто је $h >> a$, из једначине континуитета за стационарно струјно поље добијамо интензитете густине струја уземљивача (1) и лика (2), $J_1=J_2=\frac{I}{4\pi r^2}$, где је r растојање од центра уземљивача, односно лика.

На x–оси је вектор јачине електричног поља

$$\mathbf{E}(x)=\frac{\mathbf{J}_1(x)+\mathbf{J}_2(x)}{\sigma}=\left(\frac{I}{4\pi\sigma x^2}+\frac{I}{4\pi\sigma(x+2h)^2}\right)\mathbf{i}_x,$$

где x меримо од центра уземљивача, O, па је потенцијал уземљивача (1), у односу на референтну тачку у бесконачности,

$$V_1=\int_a^\infty \mathbf{E}(x)\cdot(\mathrm{d}x\,\mathbf{i}_x)=\frac{I}{4\pi\sigma}\int_a^\infty\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2h)^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2h}\right)\approx\frac{I}{4\pi\sigma a}.$$

По дефиницији, отпорност уземљења уземљивача је

$$R_{\mathrm{uz}}=\frac{V_1}{I}\approx\frac{1}{4\pi\sigma a}.$$

3. (а) $\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}$, $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, $\mathbf{B}=\mathbf{B}(\mathbf{H})$. (б) $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$. (в) $\Delta\mathbf{A}=-\mu_0\mathbf{J}$.

4. (а) Линије индукованог електричног поља су кружнице са центром на оси соленоида. (б) $|\mathbf{E}_{\mathrm{ind}}(r)|=\frac{\mu_0 N'r}{2}\left|\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|$, $0\le r<a$, $|\mathbf{E}_{\mathrm{ind}}(r)|=\frac{\mu_0 N'a^2}{2}\left|\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|\frac{1}{r}$, $a<r$.

ЗАДАЦИ

1. (а) $a_{11}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2H}{a}$, $a_{12}=a_{21}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{d^2+(H+h)^2}}{\sqrt{d^2+(H-h)^2}}$, $a_{22}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{a}$.

(б) $C'=\frac{a_{11}-2a_{12}+a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}$.

2. (а) $G=\frac{\pi\sigma L}{\ln(b/a)}$. (б) $\mathbf{H}(r,z)=\begin{cases}\left[\frac{\sigma U}{\ln(b/a)}\frac{L/2-z}{r}+\frac{U}{2\pi Rr}\right]\mathbf{i}_\phi,\ 0\le z\le L/2,\ a<r<b\\ \frac{U}{2\pi Rr}\mathbf{i}_\phi,\ L/2<z\le L,\ a<r<b\end{cases}$.

Са предмета Електромагнетика